مطبوعات المجمع العلمي العراقي

مقدمة للرياضيات

تأليف

وايت هيد

ترجمة

محي الدين يوسف

مطبعة الرابطة

شركة الرابطة للطبع والنشر المحدودة
بغداد

١٣٧١ - ١٩٥٢

المحتويات

مقدمة المترجم

قرأت هذا الكتاب منذ زمن بعيد ، ومع أنني لم أكن اذ ذاك أعرف المكانة العلمية الرفيعة التى يحتلها مؤلفه فى عالم الفكر الحديث ، فقد أعجبت به اعجاباً عظيما . ورغبت فى ترجمته الى اللغة العربية لأساهم ، ولو بقسط ضئيل ، فى تغذية الفكر العربى بالآراء العلمية الغربية . وبعد مدة ليست باليسيرة أعدت قراءة الكتاب ، فأنقلبت رغبتى هذه الى عزم وتصميم . وعلى الرغم من كثرة أشغالى بدأت بها متوكلا على الله ، منتهزا سويعات من الراحة والفراغ . وكنت قد قطعت شوطاً ، عندما علمت أن اللجنة الثقافية التابعة للجامعة العربية وضعت قائمة بمختارات من الكتب الأجنبية القيمة ، لينقلها من يشاء من المعنيين برفع المستوى العلمى والثقافى فى البلاد العربية ، الى اللغة العربية . وكان هذا الكتاب واحدا منها . وقد شجعنى ذلك على مضاعفة الجهد لانجاز الترجمة سريعاً . ويسرنى الآن أن أقدمها للقارىء العربى الكريم وأتوقع أن سيجد فيها فائدة علمية كبيرة ولذة فكرية ليست باليسيرة . فهى تفيد المدرس ، وتفيد الطالب فى المراحل الأولى من الدراسات العالية ، كما تفيد القارىء الاعتيادى الذى له المام عام بأوليات الرياضيات .

ان هذه الترجمة تكاد تكون حرفية، فقد تقيدت بالنصوص الأصلية لأنقل الفكر الواردة فى الكتاب كما هى مجردة عن كل اضافة توضيحية أو حشو أو تعليق مسهب فيه •

ولابد لى هنا من الاشادة بفضل اخوانى أعضاء المجمع العلمى العراقى الموقر لموآزرتهم الثمينة • وأخص بالذكر منهم العلامة الدكتور مصطفى جواد الذى قرأ الكتاب من أوله الى آخره وأجرى عليه بعض الاصلاحات اللغوية • والعلامة الاستاذ محمد بهجة الأثرى الذى وقف على طبع الفصول الأربعة الأولى منه فى مجلة المجمع العلمى العراقى • وأرى من واجبى كذلك ، أن أقدم الشكر الجزيل للدكتور الفاضل ناصر الحانى ، فقد أتحفنى بنبذة وافية عن تاريخ حياة المؤلف ونشاطه الفكرى ، وأن أنوه بفضل عدد من السادة الأفاضل الذين كنت أناقشهم فى بعض الجمل الفنية ، والمصطلحات العلمية ، وأستأنس بآرائهم ولم يرغبوا فى أن أنوه بأسمائهم تواضعاً وكرماً منهم ، وأشكر أيضا الذوات الذين قاموا بطبع المسودات على الآلة الطابعة ومقابلتها • والحقيقة ان هذه المساعدات الكثيرة الثمينة ، من اخوان أعتز بصداقتهم ، هى التى جعلت ظهور هذا الكتاب من الممكنات • فأشكرهم جميعاً ، وأتضرع الى الله أن يلهم أبناء قومى روح التعاون الصادق للنهوض بهذا البلد المبارك •

محى الدين يوسف

نبذة عن حياة المؤلف

وايت هيد

١٨٦١ - ١٩٤٧

يعد الفيلسوف (وايت هيد) فى طليعة المفكرين الذين أثروا فى اتجاهات الفلسفة الحديثة وامتازوا بطابع فكرى خاص • فلقد تميز بسعة اطلاعه ، ودقة معرفته ، وقابليته على تبسيط المشكلات العلمية والرياضية والفلسفية تبسيطا يكفل للقارىء غير المختص ، فى أكثر الحالات ، فهمها والافادة منها بما يوقفه على طبائعها وكثير من تفاصيلها • أخذ نفسه بسنة عرف بها وتلك أن الفلاسفة يجب أن يسلكوا سبيلا مبسطة تعرض للقارىء المسائل العلمية والدينية والخلقية عرضاً سليماً ، وعليهم أن يفسروا المسائل كلها بما يضمن حسن فهمها وسلامتها •

ويمكن أن يعلل تشعب (وايت هيد) العلمى ومساهمته فى أكثر من ميدان بتأثير بيئته الخاصة به ؛ فلقد كان أبوه وجده أستاذين ، وما انقطع أبوه عن التدريس الا ليوقف نفسه للكنيسة ، ويظل عاكفاً على كتبه وثقافته ، فلا عجب أن ينشىء ابنه على السجية التى يرتضيها له •

دخل (وايت هيد) المدرسة مبكرا واتصل ـ على عادة أبناء زمانه ـ بدراسة التاريخ ، وباللغتين اللاتينية والاغريقية اللتين عركهما مدة لم

تكن محبية الى نفسه ، ولكنه لم يستطع أن يفلت منهما لأن شأنهما كان أوانذاك كبيرا ، ولكنه ولع بالتاريخ لا كولوع المؤرخين • فلقد قال عن نفسه : انه قصد فى دراسة التاريخ أن ينتزع صورا من الماضى ويرى مثيلها أو نقيضها من الدنيا الحديثة • وظل هذا دأبه ، يعرض ما سماه (الماضى العملى) ، وذلك باقتناص المثل والشواهد التى حافظت على استمرار الكيان الانسانى • وهذا يفسر طبيعة مصنفاته التاريخية ، ويبرر – فى الوقت ذاته – ما قد يبرم به المؤرخ المحترف •

ولم ينس (وايت هيد) أن يمد يده الى (التربية) ويأخذ منها بنصيب كبير ويكتب فيها كتابه المعروف (أهداف التربية) •

ولقد تهيأ له أن يبرز فى الرياضيات بجانب العلوم التى برع بها • ولما قصد (كلية ترنتى) فى (كمبردج) سنة ١٨٨٠ كان قد عزم على الانقطاع الى دراسة الرياضيات وحدها ؛ وكان ما منى به نفسه ، اذ حصل على الشهادة بعد أربع سنوات ، ومنح بعدها (زمالة دراسية) وانتخب محاضرا بهذه المادة • وكانت المدة التى قضاها فى كمبردج بين ١٨٨٠ و ١٩١٠ المهد الاول الذى خلق منه مفكرا ناضجاً ، ومتحدثاً طلقاً بارعاً ، حتى صار يعرف ببراعته فى التحدث هذا الفن الذى برع فيه طيلة حياته • ولقد تزوج عام ١٨٩٠ وأنجب ثلاثة أولاد نزع أحدهم الى التعليم وانخرط الآخر فى الجيش ، ولم يطل لبثه اذ قتل فى الحرب الأولى ، وعهد الى الأخير بمديرية مكتبة (هارفرد) • ولم تحرم هذه العائلة التى خلدها رياضى عالمى من أن يبرع أحد أفرادها بهذا العلم

ويدرسه فى أعظم جامعة ، ذلك هو (جى • ايچ • سى • وايت هيد) ابن أخ وايت هيد الكبير ، الذى اضطلع بمهمة تدريس الرياضيات فى أوكسفورد .

لقد ساهم (وايت هيد) فى أوائل حياته مع (الفيلسوف المعروف برتراند رسل) بكتابة (القواعد المنطقية للرياضيات) الذى طبع فى ثلاثة أجزاء باسم (Principia Mathematica) ؛ وكانت الخطة أن يكتب (وايت هيد) نفسه جزءاً رابعاً فى (قواعد الجبر) ولكنه لم يستطع انجاز ذلك[١] .

وكان (وايت هيد) منصرفاً فى أوائل حياته الى دراسة الرياضيات والمنطق مقتفياً خطى (پينو) و (فريج) ؛ ولم تكن تآليفه فى هذه الفترة ناجحة ـ كما قالوا ـ وذلك لأن أكثر اصطلاحاته التى قننها فى الرياضيات عثرت ، ووجدت طريقها المناسبة فى علوم أخرى وقبلت هناك ، من ذلك مثلا رأيه بأن الرياضيات ليست (علم الكم) (أو علم العدد) ولكنها علم (علاقات منطقية ثابتة) .

ولقد أجمل خلاصة آرائه فى هذا الباب بكتابه المسمى (بحث فى الجبر العالمى) الذى تطرق فيه الى ما سماه (المنطق الجبرى)

---

(١) لقد كتب الفيلسوف (برتراند رسل) مقالا فى مجلة العقل Mind فى عدد نيسان سنة ١٩٤٨ وصف فيه فكرة تاليف هذه الأجزاء وتوزيع العمل بينه وبين (وايت هيد) . وهناك فصل ممتع فى تحليل هذا الكتاب كتبه البروفسور (كواين) فى مجلد طبع بسلسلة (مكتبة الفلاسفة الأحياء) . The Liberary of Living Philosophers.

و (الجبر المنطقى)[1] ٠

ولقد اقترح فى رسالة قدمها الى (الجمعية الملكية) عام ١٩٠٥ بعنوان (آراء رياضية فى العالم المادى) توحيد المفاهيم الرئيسة حول الفراغ والمادة ٠ وكان هذا الاقتراح مستقلا عن نظرية (اينشتاين) فى النسبية التى لم تطبع حتى ١٩١٦ ٠

انتدب (وايت هيد) بعد أن أحرز صيتاً مرموقاً لتدريس الرياضيات فى جامعة لندن University College ومن ثم اختير أستاذا للرياضيات التطبيقية فى Imperial College ٠ ولقد كتب كتابه (مقدمة فى الرياضيات) ـ الذى نقدمه لقراء العربية ـ بعد عام على مكثه فى لندن ، وطبع فى السلسلة المعروفة Home University Liberary والكتاب يوحى بحق قوة (وايت هيد) الرياضية ونضجه العقلى وتمكنه من مادته ٠

ولقد كرّس وقته كله ـ وهو فى لندن ـ منصرفاً الى اصدار الكتب العلمية الثمينة سواء فى الجامعة أو فى المؤسسات العلمية الشهيرة ٠ فقدم الى (الجمعية الأرسطية) عدة مقالات وبعض الكتب القيمة منها (قواعد المعرفة الطبيعية) عام ١٩١٩ و (رأى فى الطبيعة) ١٩٢٠ و (أساس النسبية) ١٩٢٢ ٠ ولم ينضب معين الرجل ، بل ظل يتحف العالم بكتبه بين آونة وأخرى ، فأصدر كتابه المعروف

(١) شرح الدكتور Lowe منهج (وايت هيد) الرياضى بكتاب ظهر فى سلسلة (مكتبة الفلاسفة الاحياء) بعنوان (تطور وايت هيد الفلسفى) ٠

(العلم والعالم الحديث) عام ١٩٢٦ ، وكتابه (الرمزية) ١٩٢٨ .

ولقد وقف نفسه لدراسة الفلسفة بعد عام ١٩٢٤ عندما استدعته جامعة (هارفرد) للتدريس فى (فرع الفلسفة) هناك ، وظلت تحتفظ بشرف تدريسه فيها حتى وفاته عام ١٩٤٧ .

ليس لكتبه طابع واحد يلتزمه ، فيتميز بعضها بوضوح العبارة ، وحسن النظم ، وصفاء الفكرة ؛ وبعضها غامض يعز ادراكه على غير المختصين .

ولقد أنكر بعض النقدة عليه هذا ، ولكنه ظل كما قيل عنه (كالفنان يركز جهده فى انتاجه) ولجمهور قرائه أن يدركوا قصده ، وليس عليه ألا يفهموه أو يدركوه .

ظل وايت هيد الرياضى الفيلسوف حبيباً الى نفوس طلابه وقرائه ، طوال حياته ؛ ولم تنس أمهات الجامعات العالمية أن تعترف بقيمة مؤلفاته وبمآثره فى الميادين التى عمل لها كافة . فمنح عدة ألقاب علمية ورتب شرف عالية ، ويكفى القارىء أن يعرف أن ست جامعات عالية قد منحته شهادة الدكتوراه الفخرية بينها (هارفرد) و (مانجستر) .

الدكتور ناصر الحانى

الفصل الأول

الطبيعة المجردة للرياضيات

The Abstract Nature of Mathematics

ان دراسة الرياضيات مستهدفة فى أولى مراحلها لخيبة الأمل فيها • فالتطبيقات العملية المهمة لهذا العلم والمتعة النظرية بأفكاره وقوة الحجة فى أساليبه تجعلنا نتوقع تقدما سريعا نحو أعمال مهمة ممتعة اذ يقال أن بمساعدته توزن النجوم وتحصى بلايين الذرات فى قطرة الماء • ولكن هذا العلم العظيم ـ كشبح والد هملت الذى يرى هنا ثم هناك واذا به يخفى كالسراب ـ يتملص من تشبثات قوانا الفكرية أن تمسك به وما نراه منه لا يوحى بالسبب نفسه الذى كان كافياً لتملص الشبح وهو كونه ادق من طرائقنا العنيفة • واذا ما جاز استعمال العنف فيه فيجب أن يكون تجاه النتائج التافهة التى تحتل صفحات قسم من مباحث الرياضيات الأولية •

ان سبب خيبة هذا العلم فى أن يحافظ على شهرته ، هو أن الأفكار الأساسية فيه لا توضح للطالب مجردة عن الطريقة الفنية التى

ابتدعت لتيسير عرض تلك الآراء فى أمثلة معينة • وعلى ذلك يجد المتعلم المسكين نفسه ، كيما يحرز بعض المعلومات ، يتخبط فى جملة من التفاصيل لا تربط بينها فكرة عامة • لا شك فى أن المهارة الفنية شرط أول للفعاليات الفكرية القيمة ؛ اذ كيف نتذوق مثلا نغمات (ملتون) الشعرية ، أو وجد (شلى) اذا كان علينا أن نتهجى الكلمات ، ولسنا واثقين بمعرفة أشكال الحروف على انفراد ؟ وبهذا المعنى لا يوجد طريق معبد فى كيفية تحصيل العلم • الا أن قصر الانتباه من جهة ثانية على الطرق الفنية وصرف النظر عن الاهتمام بالآراء العامة لا يقل خطأ عما سبق ، وهو شأن المتحذلقين •

ليس الغرض من الفصول الآتية تعليم الرياضيات ، بل جعل المتعلم قادرا ـ منذ البدء ـ على معرفة ماهية هذا العلم ، وافهامه لماذا يعد بحكم الضرورة أساس التفكير الصحيح فى دراسة الظاهرات الطبيعية • وكل اشارة تالية الى استنتاجات تفصيلية فى أية ناحية كانت من نواحى هذا العلم ، ستذكر على سبيل المثال ، وسيعنى بجعل الفكرة العامة للموضوع مفهومة ، على ما قد يعترض بين حين وآخر من عمليات فنية أو رموز لا يفهمها القارىء أوردناها لغرض الايضاح •

يتعرف معظم الناس بالرياضيات أول مرة عن طريق دراسة الحساب فان ٢ + ٢ = ٤ تتخذ فى العادة نموذجاً للقضايا الرياضية البسيطة التى يعرفها كل أحد فالحساب اذن موضوع صالح لأن يتخذ أساساً للكشف عن أبرز ميزة لهذا العلم أن أمكن • وأول حقيقة ملحوظة

عن الحساب ، هى استخدامه فى كل شيء : فى الأذواق والأصوات والتفاح وفى الزوايا وفى خواطر العقل وعظام الجسم ؛ لأن طبيعة الأشياء لا دخل لها فى الأمر بتاتا ، فان ٢ + ٢ = ٤ تصح فى كل الأشياء ، لذلك نسجل أن الميزة البارزة للرياضيات هى أنها تتعامل بصفات وآراء تنطبق على الأشياء لمجرد أنها أشياء ، أى بصرف النظر عن كل المشاعر الخاصة أو العواطف أو الاحساسات المرتبطة بها بأى شكل كانت . وهذا هو المقصود بالقول : « ان الرياضيات علم مجرد ».

والنتيجة التى توصلنا اليها جديرة بالتأمل ، فمن الطبيعى أن نظن أن العلم المجرد لا يمكن أن يكون ذا أهمية كبيرة فى أعمال الحياة البشرية ؛ لأن بحوثه لا تتطرق الى ما له فائدة حقيقية . ومما يذكر هنا أن للكاتب (سويفت) رأيين فى هذا الأمر ذكرهما فى سياق قصته عن رحلة (كلفر) الى جزيرة (ليوتا) ، فهو يصف رياضيى ذلك البلد بأنهم قوم سخفاء العقول وخياليون لا خير فيهم ، وأن الرجل منهم لا يفيق من تأملاته الا اذا لطم وجهه ، ولهم خدم مختصون بذلك . ويصف خياطا رياضيا قاس له طوله (أى طول كلفر) بالربعية (Quadrant)[١] ثم استنتج له بقية قياساته مستعينا بالمسطرة والفرجال وكانت النتيجة أن خاط له ثوبا لا يصلح له . ومن ناحية ثانية حكم

---

(١) وهى آلة تستعمل فى وجدان المسافات والارتفاعات، تشبه السكستانت ـ السدسية ـ الا أن تقسيماتها تقع على ربع دائرة ، لا على سدسها .

رياضيو (لپوتا) فى البلاد ، وأستطاعوا أن يحفظوا سيطرتهم على رعاياهم باختراعهم العجيب لجزيرة « ممغنطة » تعوم فى الهواء ، الا أن (سويفت) فى الحقيقة عاش فى وقت غير ملائم للسخرية من الرياضيين المعاصرين اذ كان قد ظهر توا كتاب (نيوتن) : « الأصول Principia »[1] ، وهو احدى القوى العظيمة التى غيرت العالم الحديث . فكان (سويفت) كمن يسخر من الزلزال .

ان مجرد تدوين قائمة بما أنجزته الرياضيات من أعمال باهرة ، ليس بالطريقة الوافية لاعطائنا فكرة عن أهميتها ، ونحن جديرون أن نفكر قليلا فى الوصول الى السبب الأصلى الذى يجعل الرياضيات ، بسبب كونها علما مجردا محضا ، تبقى أبدا من أهم موضوعات الفكر. ولنحاول أن نوضح لأنفسنا بجلاء لماذا يجب أن ننحو فى تعليلاتنا لنظام الحوادث وترتيبها نحوا رياضيا .

تأمل كيف تتلازم جميع الحوادث ، فنحن حين نرى البرق نصغى لسماع الرعد ، وحين نسمع هزيم الرياح نستشرف الى أمواج البحر . وفى برد الخريف تتساقط الأوراق ، وحيثما نظرنا نجد نظاما سائدا وأمورا مترابطة بحيث اذا وقعت بعض الحوادث استطعنا أن نتكهن بما سيجرى بعدها . وتقدم العلم انما يستند الى الكشف عن هذه الصلات والى العمل بحذق وصبر لبيان أن حوادث هذا العالم الدائم التغير ،

---

(١) واسمه الكامل Principia Mathematica Philosophie Naturalis

ان هى الا مثل من ارتباطات أو علاقات عامة قليلة ندعوها بالقوانين • وهدف الفكر العلمى أن يستنتج العام من الخاص ، والدائم من العارض • ويعدّ سقوط تفاحة ودوران كوكب حول الشمس وتعلق الهواء بالارض – فى نظر العلم – أمثلة لقانون الجذب العام • وامكانية تحليل أشد الحوادث العرضية تعقدا الى عناصرها لبيان أنها مظاهر مختلفة لقانون ثابت ، هى النزعة المهيمنة على التفكير الحديث •

لنفكر الآن فى نوع القوانين التى نريدها لنحقق تحقيقا تاما هذا المثل العلمى الأعلى • اننا نتعرف الحقائق الخاصة بالعالم المحيط بنا بوساطة حواسنا ، فبها نسمع ونذوق ونرى ونشم ونشعر بالحر والبرد وندفع ونلمس ونتألم ونقشعر • وكل هذه احساسات شخصية بحتة • فان ألم سنى لا يمكن أن يكون ألم سنك ، وبصرى لا يمكن أن يكون بصرك • بيد أننا نعزو أصل هذه الأحساسات الى العلاقات بين الأشياء التى تؤلف العالم الخارجى • وعليه لا يقتلع طبيب الأسنان ألم السن ولكنه يقتلع السن • وليس ذلك حسب ، بل نحن نحاول أيضا أن نتصور العالم مجموعة واحدة من الأشياء المترابطة التى تؤثر فى احساسات الناس كافة فلا يوجد عالم من الأشياء خاص بحواسى ، وعالم آخر خاص بحواسك ، ولكنه عالم واحد نوجد فيه معا • انها السن نفسها للطبيب والمريض كليهما ، وان العالم الذى نسمعه ونلمسه هو العالم نفسه الذى نراه •

فمن السهل اذن أن نفهم أن المطلوب هو وصف العلاقات بين

هذه الأشياء الخارجيه وصفا لا يعتمد على حاسة مخصوصة ، ولا على مجموعة الحواس لانسان بعينه ، وأنه يجب أن نصف القوانين التى يؤيدها سير الحوادث فى عالم الأشياء الخارجية وصفاً حيادياً جامعاً ـ ان امكن ـ بحيث تكون هى هى للعمى والصم ، أو لمخلوقات أرقى منا فهماً ، كما هى للرجل الاعتيادى •

ونحن اذا ما تركنا احساساتنا الآنية جانبا ، فالقسم الأكثر فائدة فيما يتبقى من مداركنا ـ لوضوحه واحاطته ـ يتألف من الفكر العامة عن الخواص المجردة الأساسية للأشياء ، أعنى الأفكار الرياضية المجردة المذكورة سالفا • وهكذا حدث أن البشرية أخذت تسير خطوة خطوة فى البحث عن وصف رياضى لخواص الكون دون أن تدرك مغزى ما تقوم به • اذ بهذه الوسيلة وحدها يمكن تكوين فكرة عامة لسير الحوادث طليقة من قيود ناس بأعيانهم ، أو احساسات بعينها . مثال ذلك أننا اذا سئلنا ، ونحن على مائدة ، وفى يد أحدنا تفاحة يأكلها : ما الشىء الذى كان فى متناول حاسة بصرى ، وحاسة لمسك ، وحاستى ذوقه وشمه ؟ كان جوابنا جميعا : تفاحة • الا أن العلم فى تحليلاته النهائية يرمى الى وصف التفاحة ، بدلالة أوضاع ذراتها وحركاتها ، ذلك الوصف الذى يتجاهلنا جميعا : أنا وأنت وهو ، كما يتجاهل البصر واللمس والذوق والشم • وهكذا تزودنا الآراء الرياضية ما يستلزمه الوصف العلمى لسير الحوادث ، لأنها آراء مجردة •

ويساء فهم هذا الأمر احيانا بسبب التفكير فيه فى نطاق ضيق ،

فقد كان لدى (فيثاغورس) لمحه عنه حين قال : « ان العدد لهو أصل جميع الأشياء » كما أن الاعتقاد فى العصور الأخيرة أن التفسير النهائى لكل الأشياء يوجد فى ميكانيك (نيوتن) ، ليس هو فى الواقع الا تلميحا الى الحقيقة القائلة : ان العلم كلما تقدم نحو الكمال كان رياضيا بآرائه .

الفصل الثانى

المتغيّرات

VARIABLES

بدأت نشأة الرياضيات (علما) حين برهن أحد الناس ــ ويرجح أنه كان يونانيا ــ على قضايا لا تتقيد بأشياء معينة خاصة ، بل تنطبق على (أى) الأشياء ، أو على أشياء (ما) • وكان اليونانيون أول من أحدثوا هذه القضايا فى الهندسة ، بل ان علم الهندسة هو أعظم ما نتجه اليونان فى الرياضيات • أما الجبر ، فانه مع التمهيدات اليسيرة التى خلفها المتأخرون من رياضيى اليونان ، مرت عليه عصور قبل أن تتهيأ له بداية موفقة •

وقد ساعد استعمال الحروف ، بدل الأرقام الحسابية المعينة ، على تكوين آراء عامة فى الجبر تبحث عن (أى) مقدار ، أو عن مقدار (ما) دون تحديده • مثال ذلك ، أننا اذا قلنا فى الحساب ان: ٢ + ٣ = ٣ + ٢ تكون تلك حالة خاصة • أما فى الجبر ، فاننا نضع ذلك بصورة عامة فنقول : اذا مثلت س ، ص (أى) عددين كانا ، فان س + ص = ص + س • كذلك بدلا من قولنا ٣ > ٢ نقول على وجه

التعميم : اذا كانت س (أى) عدد فلابد من وجود عدد (ما) ، أو أعداد ، مثل ص بحيث تكون (ص > س) ولا بأس من الأشارة عرضا الى أن الفرض الأخير ـ ويتجلى كونه فرضا حين يوضع بصيغته النهائية الدقيقة ـ ذو أهمية كبيرة لكل من الفلسفة والرياضيات ، فعنه تنبثق فكرة اللانهاية . وربما كان تقدم الجبر ـ ونقول (ربما) لأن ما سنذكره هو من باب الحدس ـ متوقفا على معرفة الأرقام العربية التى تم بادخالها اهمال استعمال الحروف الهجائية اهمالا نهائيا فى الرياضيات كأعداد معينة . ذلك الأمر الذى نبه الرياضيين على الاستفادة من هذه الحروف لما فى ذلك من تيسير فنى للدلالة على كميات غير معينة كما نقصد بقولنا (أى) عدد او عدد (ما) . فالرومانيون مثلا كانوا يعبرون عن سنة ١٩١٠ بالحروف Mdccccx ، مع أننا نعبر عنها بالأرقام ١٩١٠ ، وبذلك انفتح المجال أمامنا لاستعمال الحروف فى الرياضيات لأغراض أخرى .

وبعد ظهور الجبر اخترع (نيوتن) و (ليبنتز) حساب التفاضل ، وعقب ذلك ركود فى تقدم فلسفة العلوم الرياضية فيما يخص بالآراء التى سردناها آنفا . ولم يدرك الرياضيون أهمية الفكرتين (أى) و (ما) وكونهما أساسيتين فى طبيعة الرياضيات الا قبل سنوات قليلة حيث نجم عن ذلك أبواب جديدة فى العلوم الرياضية ليتوغل فيها من شاء من الباحثين .

ولنذكر الآن بعض النصوص الجبرية البسيطة لنعرف معرفة

تدقيق كيف تتولد الأفكار الأساسية :

١ ـ (أيا) كانت قيمة س العددية فان س + ٢ = ٢ + س •

٢ ـ لقيمة (ما) من قيم س العددية يكون س + ٢ = ٣ •

٣ ـ لقيمة (ما) أو قيم (ما) من قيم س العددية يكون س + ٢ > ٣•

وأول مسألة جديرة بالملاحظة هي معرفة المعاني التي يمكن أن تنطوي عليها كلمة (ما) كما استعملت هنا • ففي المثال الأول نقول : لما كانت س + ٢ = ٢ + س صحيحة مهما ، أو (أيا) كانت قيمة س ، فهي اذن صحيحة لكل قيمة (ما) من قيم س ، وهكذا فان (أيا) بهذا النوع من الاستعمال تعني (ما) ، وان (ما) تتضمن في معناها (أيا) • أما في المثال الثاني فلا توجد الا قيمة واحدة لـ س تجعل س + ٢ = ٣ وهذه القيمة هي العدد ١ • فتدل (ما) في هذه الحالة على قيمة واحدة ، أي العدد ١ • وأما في المثال الثالث فان كل قيمة لـ س أو أية قيمة لـ س (أكبر) من الواحد تجعل س + ٢ > ٣• ولذلك تدل (ما) في هذا المثال على كل مقدار أو عدد يقع بين الواحد و (أي) وتدخل في ذلك الحالتان النهائيتان (الواحد و أي) •

وانه لأمر طبيعي أن نستعيض عن النصين (٢) و(٣) بالسؤالين الآتيين :

٢َ ـ ما قيمة س التي تجعل س + ٢ = ٣ ؟

٣َ ـ ما قيم س التي تجعل س + ٢ > ٣ ؟

واذا نظرنا في (٢َ) وجدنا أن س + ٢ = ٣ هي معادلة • ومن

السهل أن نرى أن حلها هو س = ٣ - ٢ = ١ ، واذا ألقينا هذا السؤال ووضعنا معادلة تتضمن معناه كالمعادلة س + ٢ = ٣ سمينا س بالمجهول ، وغاية حل المعادلة هو وجدان هذا المجهول • ولا ريب فى أن للمعادلات أهمية كبيرة فى الرياضيات ، بل قد يلوح أول وهلة كأن النص (٢) يعرب عن حقيقة أدق وأعمق مما ينطوى عليه النص (٢) غير أن ذلك خطأ واضح ، لأن فكرة (المتغير) الذى لا قيمة محدودة له ، والذى نعبر عنه بقولنا (أى) و (ما) ، هى فى الحقيقـة الفكـرة المهمة فـى الرياضيات • أما فكرة المجهول واستخراج قيمته بحل المعادلة بأقصر الطرق ، فهى على أهميتها تعد ثانويـة • ومن الأسبـاب التى تجعل الكثير من بحوث الجبر الأولية تافهة ، هو شغل الكتب الدراسية بحل المعادلات • وهذه الملاحظات بأعيانها تنطبق على المتباينة (٣) اذا ما قوبلت بالنص الوارد فى (٣) •

ان معظم الدساتير الرياضية المهمة وخصوصا ما يتضمن الفكرة (ما) ، يحتوى على أكثر من متغير واحد ، فان البحث مثلا عن أزواج الأعداد س ، ص التى تحقق العلاقة س + ص = ١ (سواء أكانت هذه الأعـداد صحيحة أم كسرية) ينطوى على فكرة متغـيرين مترابطين هما س ، ص • وفى الحالات التى يوجد فيها متغيران تخطر على البال الفكرتان الواردتان فى النوعين الأساسيين من النصوص السابقة فنقول مثلا : (١) مهما كان زوج الأعداد س ، ص أو (أيا) كانت القيمة العددية لكل من س ، ص فان س + ص = ص + س و (٢) لبعض

الأزواج من العددين س ، ص او لأزواج (ما) من القيم العددية لـ س ، ص يكون س + ص = ١ •

ان النص الوارد فى (٢) يدعونا الى النظر فى مجموعة أزواج لأعداد التى تترابط فيما بينها بعلاقة ثابتة كالعلاقة بين س ، ص حين يكون س + ص = ١ واحدى فوائد الدساتير التى تدخل فى الفكرة الواردة فى النص (١) أى التى تصح فى أى زوج كان من الأعداد ، أنها تساعد على وضع الدساتير من النوع (٢) بأشكال مترادفة لا حصر لها مثال ذلك : ان العلاقة س + ص = ١ يمكن أن توضع بأشكال مترادفة شتى ، مثل س + ص = ١ ، (س − ص) + ٢ص = ١ ، ٦س + ٦ص = ٦ ••• الخ • وهى على اختلافها فى الشكل تنص على العلاقة نفسها بين س ، ص ، وبذلك يتاح للرياضى الماهر أن يستخدم الشكل الذى يراه أكثر صلاحا للوصول الى مقصده الآنى •

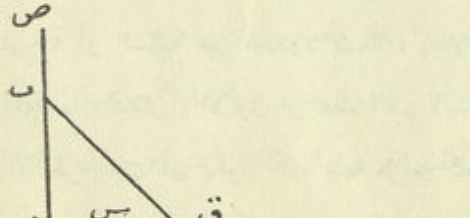
اذا ارتبط حدان بعلاقة ثابتة وفرضت قيمة ما لأحدهما ، فليس من الصواب فى الأعم الأغلب القول : ان ذلك يؤدى حتما الى وجدان قيمة معينة للثانى • مثال ذلك : ان س ، ص اذا ارتبطتا بالعلاقة ص^{٢} = س وفرضنا أن س = ٤ فان ص = ± ٢ ، ومعنى ذلك أن كل قيمة موجبة لـ س تقابلها قيمتان لـ ص • أما فى العلاقة س + ص > ١ اذا فرضت قيمة ما لأحد الحدين س أو ص ، فان الحد الآخر يمكن أن يأخذ قيماً مقابلة لا حصر لها تحقق هذه العلاقة •

وفى الموضوع مسألة مهمة أخرى تستدعى الانتباه ، وتتبين عند

درسنا للعلاقة س + ص = ١ ففى هذه العلاقة اذا اقتصرنا على التعامل بالأعداد الموجبة فقط (سواء أكانت صحيحة أم كسرية) وجب أن لا تزيد قيمة كل من ص أو س على الواحد الصحيح • فاذا جاوزت قيمة أحدهما هذا المقدار لا يمكن أن تكون قيمة الثانى موجبة ، وعلى ذلك تحصر هذه العلاقة « مجال » اختيار قيم للمتغير س بالأعداد التى لا تزيد على الواحد الصحيح ، وكذلك الحال فى « المجال » المفتوح لـ ص • ولنلق نظرة الآن على العلاقة $ص^{٢}$ = س فان اقتصرنا – عند اعطائنا أزواج القيم للمتغيرين س ، ص التى تحقق هذه العلاقة – على الأعداد الصحيحة فقط موجبة كانت أو سالبة ، وجدنا أن مقابل كل عدد صحيح نعده قيمة لـ ص يوجد عدد صحيح لـ س ، ووجدنا أيضا أن « مجال » اختيار القيم للمتغير ص من بين الأعداد الصحيحة الموجبة أو السالبة غير محدود بتاتا ، بخلاف قيم س التى يحد من « مجالها » قيدان : الأول ان هذه القيم لابد أن تكون موجبة دائما ، والآخر يجب أن يكون كل منها مربعا كاملا كيما تكون ص عددا صحيحا • وعلى ذلك يكون « مجال » فرض قيم لـ س محصورا فى المجموعة العددية $١^{٢}$ ، $٢^{٢}$ ، $٣^{٢}$ ، $٤^{٢}$ ••• الخ ، أى من بين ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ••• الخ •

وإذا ارتبط أزواج من الأعداد س ، ص بعلاقة ما ، فان دراسة الخواص العامة لهذه العلاقة تتيسر كثيرا باستعمال الرسم البيانى ، وهاك التفصيل :

ارسم المستقيمين المتعامدين م س ، م ص ، ثم خذ على امتداد م س ، س من الوحدات (بأى مقياس كان) واحسب ذلك ممثلا للعدد س، وكذلك خذ على امتداد م ص ، ص من الوحدات (بأى مقياس كان) وعد ذلك ممثلا للعدد ص ، وبذلك يكون طول م حـ (راجع الشكل ١) الواقع على م س يساوى س من الوحدات وطول م د الواقع على م ص يساوى ص من الوحدات . فاذا أكملنا متوازى الأضلاع م حـ ق د تحدث لدينا نقطة ق ، وهى تقابل العددين س ، ص ، وهكذا فان كل نقطة واحدة يقابلها زوج من الأعداد ، وكل زوج من الأعداد تقابله نقطة واحدة . ويطلق على زوج الأعداد اسم (الاحداثيين) ويمكن تبيان النقاط التى تحقق احداثياتها علاقة ثابتة بين متغيرين بوضوح ، وذلك بامرار خط بها ان كانت جميعا على خط ، أو بتظليل مساحة ان كانت تقع جميعاً على تلك المساحة . وفي الأحوال التي يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بمعادلة ما مثل س + ص = ١ أو $ص^{٢}$ = س تقع النقاط التي تحقق إحداثياتها العلاقة المبينة بالمعادلة الأولى جميعاً على خط مستقيم ، أما المبينـة في المعادلة

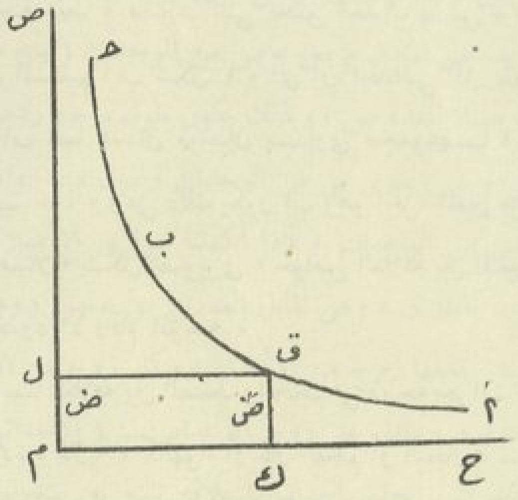


شكل (١)

الثانية ، فتقع على خط منحن . واذا أخذنا بنظر الاعتبار الأعداد الموجبة فقط ، فالنقاط التي تحقق احداثياتها س + ص = ١ تقع على الخط المستقيم ا ب شكل ١ « أي أن احداثيي كل نقطة واقعة على المستقيم اب هما عددان موجبان يساوى مجموعهما ١ » ، وفيه م ا = ١ ، م ب = ١ . وعلى ذلك يكون اب وهو الجزء المعين من المستقيم غير المحدود ممثلا ، بشكل تصويرى ، خواص العلاقة بين المتغيرين س ، ص ضمن حدود الأرقام الموجبة .

ان دراستنا للعلاقة بين الضغط والحجم في درجة حرارة ثابتة لكتلة معلومة من مادة « غازية » كالهواء أو غاز الفحم أو البخار ، تمدنا بمثال آخر للعلاقة بين متغيرين . فان فرضنا أن ح هي حجم الغاز بالأقدام المكعبة ، وأن ض هي مقدار الضغط بالباوندات ، لوجدنا من تطبيق القانون المدعو بقانون بويل أن حاصل ضربهما ، أي ح ض ، يساوى كمية ثابتة بشرط أن لا تتبدل درجة الحرارة خلال فترة التغير . ولنفرض مثلا أن كمية الغاز في الأحوال المحيطة بها تجعل من الممكن أن يكون ح ض = ١ (مع علمنا أن مقدار العدد على الجهة اليسرى من المعادلة لا أهمية رئيسية له) فلأجل وضع صورة بيانية لما سبق نرسم الخطين المتعامدين م ح ، م ض (راجع الشكل ٢) ونأخذ على أولهما البعد م ك ليمثل العدد ح من الوحدات الحجمية (أي عدد الأقدام المكعبة) ونأخذ على الثاني البعد م ل ليمثل العدد ض من وحدات الضغط (أي عدد باوندات الضغط على الانج المربع الواحد) ،

ثم نكمل المتوازى الأضلاع م ك ق ل ، فنجد نقطة ق . وهى تمثل حالة



شكل (٢)

الغاز الذى يكون حجمه ح اذا كان الضغط الواقع عليه ض . واذا كانت أحوال هذا الجزء من الغاز بحيث أن ح ض = ١ فان النقاط ق جمعاء التى تناظر أية حالة كانت من حالات هذا الجزء من الغاز تقع على الخط المنحنى ا ب حـ ، وهو يتضمن جميع النقاط التى تكون فيها كل من ح ، ض موجبة ويكون ح ض = ١ وعلى ذلك يصور هذا المنحنى صورة بيانية للعلاقة بين الحجم والضغط . فحين يكون الضغط كبيرا جدا تكون نقطة ق المناظرة لهذه الحالة واقعة بالقرب من حـ أو وراءها على الجزء غير المرسوم من المنحنى ، ويكون الحجم اذ ذاك صغيرا جدا . أما اذا كان الحجم كبيرا ، فان نقطة ق تقع بالقرب من ا ،

أو أبعد منها ، ويكون الضغط قليلا ، وربما احتاج المهندس الفيزيائى الى معرفة الضغط الذى يولد حجما معينا ، وبهذا ندخل فى قضية البحث عن المجهول ض اذا كان ح عددا معينا الا أن ذلك يقع فى الأحوال الخاصة فقط . ولكنا اذا أردنا الوقوف على الخصائص العامة للغاز وتصرفاته ، وجب أن نأخذ بنظر الاعتبار الشكل العام لجميع المنحنى ا ب حـ ، وكذلك خواصه العامة ، ونقول بتعبير آخر : ان الفكرة الأساسية حقيقة هى فكرة زوج المتغيرين اللذين يحققان العلاقة ض ح = ا ، وهذا المثال يوضح لنا لماذا تعد فكرة المتغيرات أساسية فى الرياضيات النظرية والتطبيقية .

الفصل الثالث

اساليب التطبيق

METHODS OF APPLICATION

ان الكيفية التى ظهرت بها فكرة المتغيرات المتصلة فيما بينها بعلاقة ما ، فى التطبيقات الرياضية ، جديرة بالتفكير • واذا ما خصصنا لها شيئا من الوقت ، فستنجلى أفكارنا فى الموضوع بكليته •

لنبدأ بأيسر الأمثلة ، ولنفرض أن القدم المكعبة الواحدة من البناء تكلف من المال درهما واحدا ، وأن الدينار كما هو معلوم يساوى ٢٠ درهما ، فيترتب على ذلك ـ فى جميع الأحوال المعقدة التى تلازم انشاء بيت جديد فى وسط الاحساسات والعواطف المتنوعة التى تتنازع المالك والمعمار والبناء والعامل والمتفرج ، وترافق عادة نماء البيت وتكامله ـ أن العلاقة بين السعة المكعبة وكلفة المالك تبقى ثابتة بموجب الدستور المفروض • أى اذا كانت س عدد الأقدام المكعبة فى البناء ، وكانت ص كلفته مقدرة بالدنانير ، فان ٢٠ ص = س • ومع أن المفروض أن هذه العلاقة بين س ، ص تصح عند انشاء أى بيت كان لأى مالك كان ، لا يمكن أن يزعم أن الاحساس بحجم البيت وتكاليفه وادراكهما حدث

بتأثير حاسة خاصة ، أو قوة معينة من قوى العقل ، أو أى انسان معين كان • فهما (أى الحجم والكلفة) يذكران ذكرا عاما مجردا ، من غير اكتراث لحالة المالك الفكرية حينما يطلب منه دفع التكاليف •

ولفكر أبعد من ذلك قليلا لنرى ماذا يعنى كل هذا • ان انشاء بيت هو مجموعة معقدة من الأعمال ، وانه ليستحيل البدء بتطبيق القانون ، أو تحقق صحته الا اذا استطعنا أن نميز خلال السير العام للحوادث أن مجموعة أعمال معينة تؤلف حالة خاصة هى بناء بيت ، ونقول بايجاز : يجب أن نعرف أن هذا بيت عند مشاهدته ، ونعرف أدوار انشائه ، وفى أثناء هذه الأدوار التى عزلناها بالفكر عن سائر الطبيعة يجب أن يكون عنصرا الكلفة والسعة التكعيبية قابلين للتحديد • واذا ما تم تعيين مقدار كل منهما ، وكان القانون صحيحا ، وجب أن تحقق هذه المقادير الدستور : ٢٠ ص = س •

فهل هذا القانون صحيح ؟ ان كل ذى خبرة بالمبانى يعلم أننا قدرنا السعر عاليا بعض الشىء ، وأن البيت الفخم وحده هو الذى يتطلب مثل هذا السعر • وهذا يثير أمرا آخر يجب ايضاحه ، وهو أننا عند اجرائنا الحسابات المتعلقة بالدستور ٢٠ ص = س لا يهمنا أن يكون القانون صحيحا أو مغلوطا فيه ، ونقول أكثر من ذلك : لا يهمنا شىء حتى المعانى التى أعطيناها لـ س ، ص وهى أن تمثل أولاهما الأقدام المكعبة والأخرى الدنانير • وذلك أننا فى خلال البحث الرياضى لا نتناول فى الحقيقة سوى دراسة خواص العلاقة بين زوجى العددين

س ، ص • أما النتـائج التى تتوصل اليها ، فتصلح أن تنطبق بالدقة نفسها كما لو كانت ص عـدد السماكين وس عدد الأسمـاك بحيث يكون القانون المفروض أن معدل ما يصطاده السماك الواحد هو ٢٠ سمكة • ان الحقيقة الرياضية الموثوق بها فى هذا البحث تتعلق بالنتائج التى تبين خواص العلاقة ٢٠ ص = س حسب ، أى بين زوجى العددين المتغيرين س ، ص ، مع أنه لا توجد حقائق رياضية موثوق بها بأى شكل كان لما يكلفه البناء الفعلى لأى بيت كان • وعلى ذلك لا يكون القانون تام الصحة ، ولا تكون النتائج التى ينتجها مضبوطة حق الضبط ، ولعلها كانت مغلوطا فيها الى حد كبير • لا شك فى أن كل ذلك يبدو واضحا جدا ، الا أنه فى الحالات التى هى أشد تعقيدا ، لا يوجد فى الحقيقة خطأ أكثر شيوعا من القول بأن الحسابات الرياضية اذا كانت طويلة ومدققة فان انطباقها على قسم من حقائق الطبيعة يجب أن يكون حتميا ؛ ذلك أنه لا يمكن أن تكون نتيجة قضية مـا أكثر صحـة من مقدماتها المفروضة • ولما كانت جميع الحسابات الرياضية عن سير الطبيعة تبدأ بقانون طبيعى مفروض ، كالقانون الذى فرضناه آنفاً لكلفة البناء ، فان حساباتنا فى وجوب وقوع حادثة ما ، مهما كانت مدققة ، لا تنفى الشك الذى يخامرنا فى صحة القانون• ويكاد يكون من المحقق أن النتيجة الدقيقة التى قررها القانون لا تكون مضبوطة كما ينبغى • وعلى ذلك لا تنطبق النتيجة الواقعية على النتيجة المحسوبة انطباقا تاما حتى فى أفضل الأحوال • ولما كنا لا نملك قوة قادرة على الملاحظة

بتدقيق مثلى ، نرى أن قوانيننا غير المضبوطة تكفى فى بلوغ أغراضنا .

لنوجه الآن أنظارنا الى قضية واقعية ، وهى قانون الجذب لـ (نيوتن) . فان هذا القانون ينص على أن قوة الجذب بين كل جسمين تتناسب طردا مع حاصل ضرب كتلتيهما ، وعكسا مع مربع البعد بينهما . فاذا رمزنا بـ $ك_١$ ، $ك_٢$ لكتلتى الجسمين محسوبة بالباوندات و بـ (ل) للبعد بينهما بالأميال ، فان القوة المسلطة على أحد الجسمين ، الناشئة عن جذب الآخر له باتجاه ذاته ، تتناسب مع $\frac{ك_١ ك_٢}{ل^٢}$ ، وعلى ذلك يكون في الامكان أن ندون أن هذه القوة تساوي $\frac{ب ك_١ ك_٢}{ل^٢}$ ، حيث تكون ب عددا معينا يتوقف مقداره على القيمة المطلقة لهذا التجاذب ، وعلى المقياس الذى نختاره لذرع القوى . وان رغبنا فى أن نجرى حسابنا بدلالة قوى كوزن كتلة مقدارها باوند واحد ، فمن السهل أن نرى أن العدد الذى تمثله ب يكون فى غاية الصغر . فحينما نفرض أن كلا من $ك_١$ ، $ك_٢$ ، ل تساوى واحدا ، يصبح المقدار $\frac{ب ك_١ ك_٢}{ل^٢}$ دالا على قوة التجاذب بين كتلتين متساويتين ، مقدار كل منهما باوند واحد والبعد بينهما ميل واحد ؛ ويكون قدر التجاذب فى هذه الحالة لا أهمية له .

ومهما كان الأمر فقد توصلنا الى دستور لقوة التجاذب . فاذا سمينا هذه القوة ق ، يكون $ق = \frac{ب ك_١ ك_٢}{ل^٢}$. وهذا الدستور

يعطينا صلة الترابط بين المتغيرات ق ، $ك_1$ ، $ك_2$ ، ل .

وجاء في قصة نيوتن التي نعرفها جميعا في الكشف عن قوة الجاذبية ، أن (نيوتن) كان جالسا في بستان ، وشاهد تفاحة تسقط من شجرة ، فلمعت في ذهنه فورا فكرة الجاذبية العامة . وليس من المهم أن تكون الصيغة النهائية للقانون قد خطرت بباله حين كان في بستان ، أو في مكان آخر ، فلا شك أنه كان آنذاك في مكان ما ، ولكن بالنسبة لأغراضنا يكون من الأفضل تثقيفيا ، أن تنعم النظر في الكمية الكبيرة من الآراء التمهيدية ، التي تمخضت عنها عقول كثيرة خلال عصور عدة ، وكانت ضرورية لامكان صوغ هذا القانون المضبوط . فقد لزم أولا تكوين عادة التفكير الرياضي ، وابتكار أساليب البحث الرياضية مما سبق أن أوضحناه في الفصلين السابقين ؛ ولولا ذلك لاستحال على (نيوتن) أن يفكر في دستور يعبر عن القوة بين أي كتلتين كانتا لأي بعد كان بينهما . ان المصطلحات المستعملة كقوة وكتلة ومسافة كانت هي أنفسها محتاجة الى تعريف . ولنأخذ أيسرها وهي (المسافة) ، فقد يبدو من الوضوح بمكان أن نتصور أن الاشياء المادية تؤلف شكلا هندسيا معينا ، بحيث تكون الأبعاد بين أجزائه المختلفة قابلة للقياس باحدى وحدات الطول كالميل أو اليارد . ويكاد يكون ذلك أول ما يلوح للخاطر عند دراسة مظاهر البنيان المادي ، وهو الثمرة التدريجية لدراسة الهندسة ونظرية القياسات . ومع ذلك يستعمل حتى الآن في قسم من الحالات ، نوع آخر من التفكير لقياس الأبعاد .

ففى الأرضين الجبلية تقاس المسافات بالساعات . فان تركنا المسافة جانبا فان القوة والكتلة أشد غموضا منها . والحقيقة ، ان التفهم التام للأفكار التى اراد (نيوتن) أن يعبر عنها بهذه الكلمات نمى ببطء ، وان (نيوتن) نفسه كان أول من أحاط علما بالقواعد العامة للديناميكا .

أخطأ الناس فى فهم العلم طوال العصور الوسطى بتأثير (أرسطو) . وكان من حسن حظ (نيوتن) أنه جاء بعد سلسلة من عظماء الرجال الذين أعادوا تشييد العلم ومهدوا الطريقة الصحيحة للتفكير به ، وخصوصا (غاليلو) فى ايطالية ، وكان ذلك خلال القرنين السابقين له ، فجاء هو فأكمل عملهم بعد أن أصبحت لديه فكرة واضحة ومعينة عن القوة والكتلة والمسافة مع ادراك أهميتها وامكان تطبيق ذلك على سقوط التفاحة وحركات الكواكب . وهكذا عثر على قانون الجذب ، وبرهن على أنه الدستور الذى يصح دائما عند تطبيقه على هذه الأنواع المختلفة من الحركة .

ان الأمر الحيوى فى استخدام الدساتير الرياضية هو أن تكون لديك فكرة واضحة وتقدير صحيح لامكان انطباقها على الظاهرات التى تكون فى قيد الملاحظة . ولم يكن أجدادنا الأقدمون أقل منا تأثرا بأهمية الظاهرات الطبيعية ولا بالرغبة فى اتخاذ الوسائل الفعالة لضبط تتالى الحوادث ، فقد كانوا ـ بحكم الآراء الخاطئة التى يقولون بها ـ يقومون بالاحتفالات الدينية الفخمة لتسهيل ميلاد القمر الجديد ، كما أنهم يضحون القرابين لانقاذ الشمس فى أثناء أزمة الكسوف .

وليس فى الأمر ما يدعو الى اعتقاد أنهم كانوا أكثر بلادة منا ، الا أنه فى تلك الحقبة من الزمن لم يتيسر المجال للتجمع البطىء للآراء الواضحة الصائبة ٠

ويتضح الأسلوب الذى نمت به العلوم الطبيعية حتى اتخذت شكلا قابلا للمعالجة بالطرق الرياضية ، من دراسة تاريخ النماء التدريجى لعلم الكهر مغناطيسية ٠ ان عواصف البرق والرعد تحدث كثيرا فترعب الانسان وتروعه ، وكذلك الحيوان ٠ ولذلك كانت منذ أقدم الأزمنة مبعث نظريات وهمية خرق ، غير أن الكشوف العلمية الحديثة المتعلقة بالكهربا ربما كانت أكثر غرابة من كل تعليل سحرى تصوره المتوحشون ٠ ثم جاء اليونانيون فعلموا أن الكهرمان « ويدعى باليونانية بالالكترون » اذا دلك يجذب الأجسام اليابسة الخفيفة ٠ وفى عام ١٦٠٠ ب٠ م نشر الدكتور (گلبرت) من أهل (كولچستر) أول كتاب فى الموضوع اتبع فيه الطريقة العلمية بعض الشىء ، فقد نسق قائمة بالمواد التى تشابه الكهرمان فى خصائصها ، كما يعود اليه أيضا فضل وجدان علاقة بين الظاهرتين الكهربية والمغناطيسية وان كانت غامضة ٠ وازداد تقدم المعرفة فى أوائل القرن السابع عشر وطوال القرن الثامن عشر ، فصنعت مكائن قليلة للحصول على الشرارات الكهربائية ، كما اخترعت جرة ليدن التى أمكن بواسطتها تقوية نتائج هذه المؤثرات ٠ وهكذا تم الحصول على شىء من المعلومات المنظمة ، الا أنه لم تكن قد وجدت بعد آراء رياضية تنطبق على هذا الموضوع ٠ وفى سنة ١٧٥٢

أرسل (فرنكلين) طائرة بين الغيوم ، وأثبت أن البروق كهربية ٠

وفي تلك الأثناء كان الصينيون منذ عصر قديم « ٦٢٣٢ ق٠ م» ينتفعون بخاصية البوصلة ولكنهم ـ كما يبدو ـ لم يربطوا ذلك بفكرة نظرية كائنة ما كانت ٠ ان التطورات التي تعد بحق عظيمة في حياة البشر تعود بأصولها الى البحث عن المعرفة لأجل المعرفة ٠ فان البوصلة لم تعرف في أوربة الا في أواخر القرن الثاني عشر بعد الميلاد ، أي بعد مرور أكثر من ٣٠٠٠ عام على بدء استعمالها في الصين ٠ ولكن الأهمية التي اكتسبها علم الكهرمغناطيسية ، منذ ذلك الحين في كل ناحية من الحياة البشرية ، لم تنشأ عن الميل العملي الفائق للأوربيين ، بل نجمت عن حقيقة أن الظواهر الكهربية والمغناطيسية قام على دراستها في الغرب رجال سيطر عليهم الميل النظري المجرد ٠

ثم ظهر التيار الكهربي ، ويعود الفضل في الكشف عنه الى اثنين من الايطاليين ، وهما (گالڤاني) عام ١٧٨٠ م ، و (ڤولتا) عام ١٧٩٢م ٠ وقد ادى هذا الاختراع الى احداث سلسلة جديدة من الظاهرات تتطلب البحث والتنقيب ٠ وبهذا أصبح لدى العالم العلمي اذ ذاك ثلاث مجموعات من الحوادث منفصلة بعضها عن بعض ، متجانسة في نوعها ، وهي : تأثيرات الكهربا الساكنة التي تتولد من مكائن الكهربا الاحتكاكية ، والظاهرات المغناطيسية ، وتأثيرات التيارات الكهربية ٠ ومنذ ختام القرن الثامن عشر فصاعدا أخذت خطوط الأبحاث الثلاثة هذه تتشابك وتتصل حتى تألف منها علم الكهرمغناطيسية الحديث الذي ينذر حياة

البشر بالانقلاب .

ثم بدأت الآراء الرياضية بالظهور ، ففى العشر السنوات من ١٧٨٠ الى ١٧٨٩ م برهن (كولمبس الفرنسى) أن الأقطاب المغناطيسية تتجاذب أو تتدافع بنسبة عكسية لمربع المسافة بينها ، وأن القانون نفسه ينطبق على الشحن الكهربية . ومما يلفت النظر التماثل العجيب بين هذين القانونين وقانون الجاذبية . وفى سنة ١٨٢٠ م اكتشف (أورستد الدنيماركى) أن التيارات الكهربية تبدى قوة تؤثر فى المغناطيس . وتلا ذلك على الفور تقريبا أن وضع (أمبير الفرنسى) دستور هذه القوة بشكل صحيح ، وبرهن أيضا أن التيارات الكهربية يؤثر بعضها فى بعض . « ان العمل التجربى الذى أثبت به (أمبير) قانون العمل الميكانيكى بين التيارات الكهربية ، يعد من أعظم الانجازات العلمية اللامعة . ويظهر أن كلا من النظرية والتجربة بزغت من فكر (نيوتن الكهربا) تامة النماء بالغة أشدها بحيث كانتا كاملتى الشكلين ولا يمكن الطعن فى كمالهما ، وقد استخلصنا بدستور جامع يمكن به أن نستنتج جميع الظاهرات الكهربية ، وهو الذى سيبقى أبدا الدستور الرئيسى لعلم الالكتروديناميكا[1] » .

أما القوانين الخطيرة للحث الكهربى بين التيارات ، أو بين التيارات والمغناطيس ، فقد تم الكشف عنها على يد (مايكل فردى)

---

(١) عن الفصل الثالث من الجزء الثانى من كتاب (الكهربا والمغناطيس) تأليف كلارك ماكسويل . والمقصود بـ (نيوتن الكهرباء) هو أمبير الفرنسى .

فی عام ۱۸۳۱ – ۱۸۳۲ م • فلما سئل : «ما فائدة هذا الكشف ؟» أجاب « وما فائدة الطفل ؟ انه يكبر ليكون رجلا » • وقد كبر طفل (فردى) وصار رجلا وهو الآن أساس جميع المستحدثات الكهربية وقام (فردى) كذلك باعادة تنظيم الوجهة النظرية لهذا العلم • أما آراؤه ، التى لم تفهم على حقيقتها بالضبط فى عالم العلم اذ ذاك ، فقد وسعها (كلارك ماكسويل) فى سنة ۱۸۷۳ م ، ووضعها فى قالب رياضى • وبالبحوث الرياضية التى قام بها (ماكسويل) تبين له أنه تحت احوال خاصة يجب أن تتولد اهتزازات أو موجات كهربية • ثم ارتأى فورا أن الموجات التى تولد النور هى كهربية • وأصبح رأيه هذا موضع الفحص لتحقق صحته ، فتبين أن نظرية النور بكاملها ليست الا فرعا من علم الكهربا الواسع • ثم تلاه (هرز الألمانى) فاقتفى خطوات (ماكسويل) ونجح عام ۱۸۸۸ م فى احداث الموجات الكهربية بطرق كهربية بحتة ، وصارت تجاربه أساس التلغراف اللاسلكى • وفى السنوات الأخيرة جرت كشوف أساسية مهمة ، ولا يزال هذا العلم مستمرا على النماء والتقدم من حيث الأهمية النظرية والفائدة العملية •

ان هذه النظرة الخاطفة التى ألقيناها على تطور هذا العلم وتقدمه ، تصور لنا كيف أمكن – بالتجارب التى أوحت شيئا فشيئا بالآراء العلمية السديدة ، وأوحت الآراء العلمية بتجارب جديدة – أن تنصهر مجموعة من الظاهرات المتفرقة ، بل التافهة ، ليتكون منها علم واحد متماسك ، نرى فيه أن نتائج الاستدلالات الرياضية المجردة ،

المستندة الى عدد قليل من القوانين البسيطة المفروضة ، تزودنا تفسيرا لسير الحوادث المتشابكة المتراكبة العقد .

وأخيرا فلنخط الى ما وراء العلوم الخاصة بالكهرمغناطيسية والضوء ، لنعمم وجهة نظرنا الى أبعد من ذلك ، فنوجه انتباهنا الى نماء الفيزياء الرياضية التى تعد فصلا عظيما من فصول التفكير العلمى ، ولنسأل أولا : ما مجمل قصة نمائها بأيسر حالاتها ؟

انها لم تبدأ علما واحدا ، ولم تكن ثمرة زمرة معينة من الناس ؛ فقد كان الرعاة البابليون يرقبون السماء ، كما كان عمال الحكومة فيما بين النهرين ومصر يمسحون الارضين . أما رجال الدين والفلاسفة ، فكانوا يطيلون التفكير فى الطبائع العامة للاشياء . فكانت المجموعة الواسعة من أعمال الطبيعة تنسب الى قوى خفية لا يسبر غورها . والمثل السائر « تهب الريح حيث شاءت » يعبر تعبيرا دقيقا عن جهلهم المطبق اذ ذاك بوجود قواعد ثابتة تتالى على حسب تفاصيلها الظاهرات الطبيعية . ولكنهم فى الأعم كانوا يعلمون ، كما هو معلوم الآن ، انتظام وقوع هذه الحوادث ، غير أنه لم يكن فى الامكان تقصّى اتصالها بعضها ببعض ، بل لم تكن لديهم معلومات عن كيفية البدء بتأليف مثل هذا العلم . ومعظم ما أمكن نتجه كان القليل من الحزر والتخمين المبعثر عن طبائع الأشياء ، ومثلهم فى ذلك كمن يرمى فى الظلام ، فيصيب حينا ويخطىء حيناً آخر .

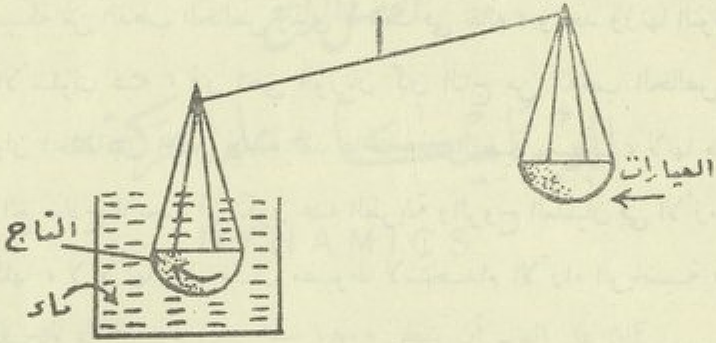
وفى الوقت عينه نتج مسح الأرض علم الهندسة ، كما كشفت

مراقبة السماء عن النظام الشمسى ودقة انتظامه . ثم جاء جماعة من اليونانيين المتأخرين ، مثل (أرشميدس) ممن كانت لهم نظرات صائبة فى أوليات قضايا الموائع والبصريات . وفى الحق كان «أرشميدس» ، الذى جمع العبقرية الرياضية الى اصالة الرأى الفيزيائى ، خليقا أن يوضع فى صف (نيوتن) الذى جاء بعده بألفى عام ، فيعد من مؤسسى الفيزياء الرياضية . وكان (أرشميدس) يعيش فى (سيركوز) المدينة اليونانية العظيمة فى (صقلية) . ويقال : انه أحرق سفن الرومان الذين كانوا يحاصرون هذه المدينة « ٢١٠ — ٢١٢ ق. م.» بأن ركز عليها أشعة الشمس بواسطة المرايا . ومع أن هذه القصة بعيدة الاحتمال جدا ، فانها شهادة حسنة على ما كان يتمتع به بين معاصريه من شهرة فى البصريات . على أنه قتل فى ختام هذا الحصار ، وجاء فى احدى الروايات المنقولة عن (بلوتارخ) عند سرده سيرة (مارسيللس) ، أن أحد الجنود الرومان وجده غارقا فى دراسته لشكل هندسى كان قد رسمه على أرض الحجرة التربة ، فأراد أسره ، فلم يطع أمره بسرعة ، فقتله . ومن الحق أن يقال ، لصيانة سمعة القادة الرومان ، أنهم كانوا قد أصدروا أوامرهم للجنود بأن لا يعتدى عليه . وفى الأخبار قصة أخرى مشهورة تحتوى على شهادة ضمنية قوية جدا بعبقريته ، فالكشف الذى يعزى اليه يليق ، عن جدارة ، بمثل نبوغه فى التنقيب الرياضى والفيزيائى . ومن حسن الحظ أنه يسير بحيث يمكن ايضاحه هنا بالتفصيل ، لأنه من أحسن الأمثلة السهلة للابانة عن طريقة

استخدام الآراء الرياضية فى الفيزياء .

يقال ان (هيرو) ملك (سيراكوز) أرسل الى أحد الصاغة بمقدار من الذهب ليصنع منه له تاجا ، ثم ظن أن الصائغ قد اختلس قسما من الذهب ووضع فى التاج فلزا رخيصا سبكه مع سائر الذهب ، فأرسل بالتاج الى (أرشميدس) وطلب اليه أن يفحصه . ولو حدث ذلك فى هذا الزمان لأمكن اجراء عدد غير محدود من الفحوص الكيميائية ، ولكن كان فى ذلك الزمان على (أرشميدس) أن يفكر فيه من حيث هو أمر لم يسبقه مثيل ، ثم خطر له الحل وهو يستحم فى الحمام ، فما كان منه الا أن قفز واخذ يجرى فى الشوارع نحو القصر صارخا « يوريكا . يوريكا » أى وجدتها وجدتها . ولو عرفنا اليوم الذى وقعت فيه هذه الحادثة ، لوجب علينا أن نحتفل به بأنه يوم ميلاد الفيزياء الرياضية . ولما كان (نيوتن) جالسا فى بستانه كان العلم قد بلغ أشده . ولقد كان كشف (أرشميدس) هذا عظيما حقا ، اذ رأى أن الجسم حين يغمر بالماء يدفعه الماء المحيط به الى أعلى بقوة تساوى محصلتها وزن الماء الذى أزاحه . ويمكن اثبات هذا القانون نظريا بالاستناد الى القواعد الرياضية لعلم الموائع كما يمكن تحقق صحته بالتجربة . وعلى ذلك فاذا كان وزن التاج فى الهواء « و » من الباوندات ووزن الماء المزاح عندما يغمر التاج بالماء «وَ» من الباوندات فان القوة الاضافية الى أعلى ، اللازمة لموازنة التاج ليبقى معلقا فى الماء ، تكون «و ـ وَ» من الباوندات .

ويمكن استخراج مقدار هذه القوة بوزن الجسم وهو معلق داخل



شكل (٣)

الماء كما ترى فى الشكل الـ(٣) . فاذا كان مقدار العيارات فى الكفة اليمنى ، ق من الباوندات ، يكون الوزن الظاهرى للتاج وهو مغمور بالماء ق من الباوندات ، ويصبح بذلك لدينا :

$$ق = و - وَ$$

$$أي\ وَ = و - ق$$

$$و = \frac{و}{وَ} = \frac{و}{و - ق} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

التي يمكن فيها وجدان كل من و ، وَ بدقة مرضية بطريقة الوزن المسهلة . وهكذا يعرف المقدار $\frac{و}{وَ}$ من المعادلة (١) . ولكن $\frac{و}{وَ}$ هذه هى نسبة وزن التاج الى وزن ما يساوي حجمه من الماء ، وهى نسبة تبقى ثابتة لكل كتلة من المعدنيات اذا كانت من المادة نفسها ، ويطلق عليها الآن اسم الوزن النوعى للمادة ،

وتتوقف على طبيعة المادة الجوهرية لا على شكلها ولا على مقدارها . ولذلك ما كان على (أرشميدس) ليفحص ذهب التاج ، الا أن يأخذ سبيكة من الذهب الخالص الذى لا شك فى نقائه ، ويجد وزنها النوعى بالأسلوب عينه ، فان اتفق الوزنان كان التاج من الذهب الخالص ، وان اختلفا بان الغش فيه . لقد عالجنا هذه القضية باسهاب ، لانها مثال رائع ساذج لما يجب أن تكون عليه الطريقة والروح العلميان فى الأزمان كلها ، لا لأنها أول مثال مضبوط لاستخدام الآراء الرياضية فى الفيزياء .

ان قتل جندى رومانى لـ (أرشميدس) يرمز الى تطور عالمى هو من الدرجة الأولى فى خطورته ، وهو انتقال سيادة العالم الأوربى من اليونانيين المعروفين بولعهم بالعلوم المجردة الى الرومان الواقعيين . ولقد عرّف اللورد (بيكونسفيلد) فى احدى رواياته الرجل الواقعى بأنه الرجل الذى يمارس غلط أجداده . كان الرومانيون شعبا عظيما ولكنهم أصيبوا بلعنة العقم الفكرى التى تلازم الواقعية فى العادة ، فلم يحسّنوا شيئا من المعلومات التى ورثوها عن أجدادهم ، واقتصر تقدمهم على قسم من التفاصيل الفنية الساذجة فى المنشآت الهندسية ، ولم يكونوا من الحالمين أصحاب الخيال الذين يطيلون التأمل حتى يصلوا الى وجوه نظر جديدة تمنحهم سلطانا على قوى الطبيعة ، أساسيا واسعا . فلم نسمع أن رومانيا فقد حياته لاغراقه التام فى تأمل الاشكال الهندسية .

الفصل الرابع

الديناميكا "علم الحركة"

DYNAMICS

كان على العالم أن ينتظر ١٨٠٠ سنة حتى يجد خلفاء للفيزيائيين الرياضيين اليونان . ففى القرنين السادس عشر والسابع عشر للميلاد قام ايطاليون عظماء وخاصة (ليوناردودافنسى) المفتن (١٤٥٢ - ١٥١٩) و (غاليلو) (١٥٦٤ - ١٦٤٢) باعادة الكشف عن السر الذى كان معروفا لدى (أرشميدس) ، وهو ربط الأفكار الرياضية المجردة بالتحريات التجريبية عد دراسة الظاهرات الطبيعية ، وفى الوقت نفسه كان تقدم الرياضيات البطىء ، وتجمع المعلومات الفلكية المضبوطة ، قد جعلا الفلاسفة الطبيعيين فى وضع أقوى على البحث والتنقيب . كما أن حب فرض الذات بدافع الاعتزاز بالنفس والنهم فى التجارب الشخصية الذى كان مستفحلا بين مفكرى ذلك العصر حملهم على القيام بالتجارب قياما شخصيا ليشاهدوا الحوادث بأنفسهم ، حتى كشفوا بالتعليل الاستقرائى عن سر العلاقة بين النظرية الرياضية والتجارب العملية . ولذا كان قيام (غاليلو) الفيلسوف برمى عدة أثقال من قمة برج پيزا

المائل عملا باهرا يميز ذلك العصر . ومع أنه لا يخلو زمن من رجال للفكر ورجال للعمل ، فقد كانت الفيزياء الرياضية ثمرة عصر تميز رجاله بأن جمعوا بين القدرة الفكرية والرغبة فى العمل .

ان اسقاط أثقال من قمة برج يعد صورة رائعة لعمل أساسى فى المعرفة لا يقل قيمة عن أول ادراك للآراء الصحيحة فى علم الحركة (الديناميكا) ، وهو العلم الأساسى للموضوع برمته . ولقد كانت نقطة الجدل الخاصة تدور حول الأجسام المختلفة الأوزان ، هل تسقط من ارتفاع واحد فى أوان واحد ؟ ذلك أن (أرسطو) ، وكان يعد قوله بالاجماع ، القول الفصل فى ذلك العصر ، قد رأى أن سقوط الأجسام الثقيلة أسرع من سقوط غيرها . ولكن (غاليلو) أصر على أنها تسقط فى الزمن نفسه ، وبرهن على صحة قوله باسقاط أثقال مختلفة من أعلى البرج المائل . أما الخروج عن هذه القاعدة الذى يشاهد أحيانا ، فله أسباب : كخفة الوزن القصوى ، أو السرعة الكبيرة ، وذلك لما لمقاومة الهواء من تأثير لولاه لظهر القانون مضبوطا .

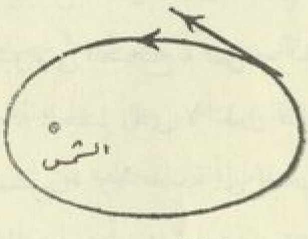
لم يكن نجاح تجربة (غاليلو) نتيجة حدس موفق ، بل كان ثمرة آرائه الصحيحة فى القوة الاستمرارية والكتلة . ولنذكر الآن نص القانون الأول للحركة كما وضعه (نيوتن) وهو : كل جسم ، يستمر على حالة السكون ، أو الحركة المنتظمة على خط مستقيم ، ما لم تجبره قوة مؤثرة على تغيير حالته ؛ فقد كان هذا القانون نشيد الانتصار على المكابرين المغلوبين أكثر من أن يكون دستورا جامدا . ولفهم القضية

التى هى تيد البحث نحذف جملة : « أو الحـركة المنتظمة على خط مستقيم » لنحصل على ما يمكن عدّه قانون (أرسطو) المضاد ، وهو : كل جسم يستمر على حالة السكون ، ما لم تجبره قوة مؤثرة على تغيير حالته •

ان هذا الدستور الاخير المغلوط فيه يزعم انه فى حالة انعـدام القوة يستمر الجسم على حالة السكون ، وعلى ذلك يتطلب الجسم اذا كان فى حالة الحركة قوة لاستمرار تلك الحركة ، فاذا توقفت هذه القوة عن العمل توقف الجسم عن الحركة • أما وجهـة نظر القـانون النيوتونى الصحيح ، فهى معاكسة لذلك كل العكاس ، فانها تنص على أن حالة الجسم الذى لا تعمل فيه قوة ما هى الحـركة المنتظمـة على خط مستقيم • ولا حاجة الى البحث عن قوة ولا عن تأثير خارجى مسبب لذلك • وبعبارة أخرى : ان الحركة المنتظمة على خط مستقيم هى التى تلازم الجسم دائما ، وان حالة السكون هى حالة خاصة بهـذا النوع من الحركة وذلك حين تكون السرعة صفرا ، وتبقى كذلك • وعليه نحن لا نبحث عن مؤثر خارجى حين يكون الجسم فى حركة الا لتعليل التغييرات التى تطرأ على معدل السرعة أو وجهتها • وما دامت حركة الجسم بمعدل السرعة وبالوجهة أنفسهما فلا حاجة الى الاستعانة بقوى أخرى لتعليل حركته •

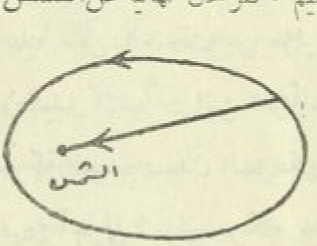
ان الفرق بين وجهتى النظر يتجلى بالرجوع الى نظرية حركة الكواكب السيارة ، فقد قال (كوپرنيكوس البولندى) المولود فى

مدينة ثورن من بروسية الغربية (١٤٧٣ ـ ١٥٤٣) : ما أيسر الأمر لو تصورنا أن الكواكب السيارة ، وفيها الأرض ، هي التي تدور حول الشمس في أفلاك تقرب من شكل الدائرة ! ثم جاء من بعد ذلك (كپلر) الرياضي الألماني فبرهن في سنة ١٦٠٩م على أن أفلاك السيارات هي ، في الحقيقة والفعل ، قطوع ناقصة ، وهي نوع خاص من المنحنيات البيضية الشكل . وسنعرض لها بتفصيل أكثر . وفي اثر ذلك ورد السؤال عن ماهية القوى التي تحفظ الكواكب في هذه الحركة ، فعلى حسب النظرية الخاطئة القديمة التي كان يتمسك بها (كپلر) يجب أن يتطلب دوام السرعة الفعلية نفسها قوة ، ولذلك أخذ يتطلع الى القوى المماسة كما يظهر من الشكل الـ (٤) ولكن على حسب نظرية (نيوتن) ينتج أنه في حالة عدم وجود قوة ما يجب أن تسير الكواكب السيارة الى الأبد بسرعتها الحالية على خط مستقيم ، فترحل نهائيا عن الشمس.



شكل (٤)

ولذلك كان على (نيوتن) أن يفتش عن قوة تحني مسير الحركة لتأخذ شكل القطع الناقص ، وقد رأى أن هذه القوة يجب أن تكون موجهة



شكل (٥)

نحو الشمس كما يظهر من الشكل الـ (٥) • والحقيقة ان هذه القوة هي قوة جذب الشمس تعمل على حسب قانون التناسب العكسى لمربع المسافة الذى مر ذكره •

ظهر علم الآلة (الميكانيك) عند اليونان من ملاحظة نظرية الكفاءة الآلية (الميكانيكية) الحاصلة من استعمال العتلات ، ومن النظر فى المسائل المختلفة ذات العلاقة بأوزان الأجسام ، ولكنه وضع أخيرا على أسسه الصحيحة فى أواخر القرن السادس عشر وفى أثناء القرن السابع عشر ، كما سبق أن بيناه • ولم يكن لوجدان تعليل لسقوط الاجسام حسب ، بل لوجدان نظرية علمية لحركات الكواكب وهذا فى الأغلب • ومنذ تلك الأيام أخذ علم الحركة (الديناميكا) على عاتقه واجبا أكثر طموحا حتى ليمكن الادعاء الآن بأنه المرجع الأخير للعلوم الطبيعية الأخرى ، وأن هذه العلوم ليست الا فروعا له •ويلخص السبب لهذا الادعاء بما يأتى : ان الصفات المختلفة للأشياء التى ندركها بحواسنا ليست الا اسلوبنا الخاص بنا لادراك ما يطرأ من تغير على مواقع الأشياء فى الفراغ • مثال ذلك : نفرض أننا ننظر الى (كنيسة وستمنستر) ، فقد كانت قائمة فى محلها كالطود بلونها الرمادى عصورا خلت ، الا أن هذا اللون الرمادي الذى يضفى على البناء ما يقوى شعورنا برسوخه ، ليس هو على حسب النظرية العلمية الحديثة الا أسلوبنا فى تعرف الحركات السريعة للذرات النهائية المؤلفة لوجه البناء ، التى تنقل اهتزازاتها مادة تسمى الأثير • ثم اننا لو وضعنا أيدينا على حجارته

للاحظنا برودتها ، وانتظام درجة حرارتها ، وذلك مما يسبغ على المكان روح الطمأنينة والهدوء • ولكن هذا الشعور بدرجة الحرارة ، لا يدل الا على انتقال الحرارة من اليد الى الحجر أو العكس • وليست الحرارة على حسب العلم الحديث الا تهيج ذرات الجسم وحركتها • وأخيرا يبدأ الأرغن فنسمع الصوت ، وهو نتيجة تموج الهواء وضربه طبلة الاذن •

ان محاولة تفسير الظاهرات الطبيعية تفسيرا حركيا (ديناميكيا) هو العمل على شرحها ببيانات ذات طابع عام تبين أن المادة كذا ، أو الجسم كذا ، كان فى المحل كذا ، وهو الآن فى محل آخر ، وهكذا نصل الى الفكرة الأساسية العظيمة للعلم الحديث ، وهى أن احساساتنا كافة هى نتيجة الموازنات بين الهيئات المتغيرة للأشياء فى الفراغ بأوقات مختلفة • ويترتب على ذلك أن قوانين الحركة ، أى قوانين التغير فى هيئات الأشياء ، هى القوانين النهائية فى علم الطبيعة •

واستخدام الرياضيات فى بحوث الفلسفة الطبيعية يجعل العلم يعمل بترتيب وانتظام ، ما يعمله التفكير المعتاد بطريقة النبه والاتفاق أى المصادفة • فحين نتحدث عن كرسى نقصد شيئا نراه ، أو نحس به بطريقة ما ، مع أن معظم حديثنا يتضمن افتراض وجود ذلك الشىء مستقلا عن بصرنا أو احساسنا • أما فى الفيزياء الرياضية ، فتتخذ طريقا معاكسا لذلك ، اذ يجرى تصور الكرسى دون الرجوع الى أحد بالذات ومن غير سلوك طريقة خاصة بالاحساس • وتكون النتيجة أن الكرسى يصبح فى الذهن طائفة من الذرات فى الفراغ ، أو مجموعة

من الالكترونات ، أو جزءا من الأثير في حالة الحركة ، أو على ما تصفه الآراء العلمية الشائعة • أعني أن العلم يحيلها الى اشياء متحركة في الفراغ يؤثر بعضها في حركات بعض • والعناصر أو العوامل المختلفة التي تدخل في حسابات مجموعة من الحالات المتصورة ، ما هي الا الأشياء التي بها يتم تعيين مواقع الأشياء في الفراغ : كأطوال الخطوط ، وسعة الزوايا والمساحات والحجوم • ومن البديهي أن حقيقة الحركة والتغير تتطلب – الى العناصر الهندسية المذكورة – ضرورة ادخال معدلات التغير لهذه العناصر ، ونعني بذلك السرع ، والسرع الزاوية والعجلة وما شاكلها • وعلى هذا تتعامل الفيزياء الرياضية بالعلاقات بين الأعداد المتغيرة التي يفترض أنها تمثل العلاقات في الطبيعة بين قياسات هذه العناصر الهندسية ومعدل تغيرها • فالقوانين الرياضية تتعامل دائما بالمتغيرات ؛ و لايعوض عن هذه المتغيرات بالأرقام الا اذا اقتضى الحال ، بين وقت وآخر ، تحقق صحة القانون بالرجوع الى التجربة ، أو اذا أريد تطبيقه للوصول الى نتائج خاصة •

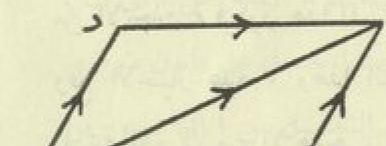
ان الشيء الممتع عن العالم حين تتصوره على هذا الشكل المجرد وأنت تدرس الفيزياء الرياضية – التي تقصر عنايتها على مواقع الاشياء وأشكالها ، وما يطرأ عليها من تغير – هو أن حوادث هذا العالم المجرد كافية في تفسير احساساتنا • مثال ذلك : ان سماع الصوت ناشيء عن اضطراب ذرات الهواء بطريقة خاصة ، فعند حدوث مثل هذا الاضطراب ، أو الموجات الهوائية كما يسمونها ، يسمع الناس الاعتياديو السمع صوتا •

وبمثل ذلك أو بما يوازيه ـ على حسب وجهات النظر المختلفة باختلاف الناس ـ تحدث احساساتنا الأخرى لأسباب أو بواعث طبيعية • ويبدو أن أفكارنا ذاتها تتغير بالتناظر مع هيأة المخ وحركته • فاذا أصاب المخ ضرر فان الأفكار يلحق بها الضرر أيضا • أضف الى ذلك أن حوادث هذا العالم المادى تتعاقب على حسب قوانين رياضية لا تعبأ باحساساتنا وعواطفنا وتفكيرنا •

ومما لا ريب فيه أن هذا هو المظهر العام لعلاقة الفيزياء الرياضية بعواطفنا واحساساتنا وتفكيرنا • وكم أثار هذا البحث من جدل ومقالات طويلة ! وليست بنا حاجة الآن الى أكثر من ملاحظة واحدة ، وهى أن هذه الحالة بأسرها نشأت ، كما رأينا عن محاولتنا لوصف عالم خارجى بشكل (تفسيرى) لعواطفنا واحساساتنا ، ولكنه ، أيضا ، عالم لا يتوقف جوهرياً على حواس معينة ولا على شخص معين • فهل هذا العالم يا ترى قصة خرافية ليس غير ؟ ان القصة الخرافية تكون خيالية وكيفية : ولو وجدنا حقا مثل هذا العالم ، لوجب أن يخضع لوصف متقن يحدد بالضبط اجزاءه المختلفة وعلاقاتها المتبادلة • ولكن العالم العلمى هذا ، يخضع لمثل هذا الفحص خضوعا عظيما ، بحيث يمكن استقصاء حوادثه والتكهن فيها باستعمال أداة الأفكار الرياضية المجردة • ويبدو من المؤكد أن ما لدينا ، هو التحقق الاستقرائى ، من فرضيتنا الاولية • ولكن يجب الاعتراف بأن البرهان الاستقرائى لايمكن أن يكون حاسما ؛ واذا كانت الفكرة بأسرها ، عن عالم ذى وجود

مستقل عن حواسنا الخاصة ، خاطئة ، وجب أن نفسر بعناية الأسباب التى تجعل محاولاتنا لوصفها ، بدلالة ما لدينا من الآراء الرياضية التى تنطبق عليها ، تنتج مثل هذا النجاح الباهر .

وسنضرب تائهين فى بيداء واسعة اذا نحن دخلنا فى الشروح التفصيلية للقوانين الأخرى للحركة ، ولذلك سنحرر بقية هذا الفصل لشرح عدة من الآراء القيمة التى تعد أساسية لكل من الفيزياء الرياضية والرياضيات البحتة . وهى فكرة الكميات المتجهة وكيفية جمعها بقانون متوازى الاضلاع . لقد سبق أن علمنا أن قوام الحركة هو أن جسما ما كان فى (أ) ثم صار فى (ج) ، ولتحديد حركة الانتقال هذه من (أ) الى (ح) انتقالا كاملا يقتضى البت فى أمرين : هما مقدار الحركة (أى طول أ ح) ووجهتها . ان كل شىء كهذا الانتقال ، مما يتعين بالضبط كما تعين هو ، أى بمجرد معرفة مقدار واتجاه يسمى بالمتجه Vector . مثال ذلك ــ ان تعريف السرعة يتطلب تحديد مقدار واتجاه ، اذ يجب أن يقال : انها كذا ميلا فى الساعة ، وفى الوجهة كذا . وخير مثال يوضح ضرورة وجود هذين العاملين وتمايزهما لتحديد السرعة ، هو عمل ربان السفينة حيث يتصل بمرؤوسيه كثيرين لتمييز هذين العاملين . فيخبر رئيس المهندسين بعدد العقد البحرية فى الساعة التى يجب أن تمخر السفينة بموجبها ، ويخبر



شكل (٦)

مدير السكان بوجهة السير الذي يجب أن يستمر فيه على حسب البوصلة . ومعدل تغير السرعة ،أي ازديادها في وحدة زمنية ، هو كمية متجهة ايضا . ومثل ذلك يقال في القوة بمعناها الحركي (الديناميكي) أعني أنها كمية متجهة . والحقيقة ان الطبيعة الاتجاهية في القوة تنشأ من الفور ــ على حسب القواعد الحركية (الديناميكية) ــ من مماثلاتها في الحركة والعجلة . ولكن هذه قضية ليست لنا حاجة الى بحثها ، بل يكفي أن نقول هنا : ان القوة تعمل على الجسم بمقدار معلوم ووجهة خاصة .

ان جميع المتجهات Vectors يمكن تمثيلها تمثيلا بيانيا بخطوط مستقيمة ، وكل ما يطلب عمله للوصول الى ذلك هو أن ينظم (أولا) المقياس الذي ستمثل بموجبه وحدات مقدار المتجه بوحدات من الطول ، كأن يقال مثلا في حالة السرع أن الانج الواحد يمثل سرعة ١٠ أميال في الساعة ، أو في حالة القوى أنه يمثل ما وزنه ١٠ أطنان و (ثانيا) أن تكون وجهة المستقيم في الشكل مطابقة لاستقامة المتجه Vector وبعد ذلك نرسم مستقيما بهذه الوجهة بحيث يكون طوله المقدار المطلوب من الانجات ، فيكون هذا المستقيم هو الذي يمثل المتجه بالمقياس الذي وقع الاختيار عليه . وهذا التمثيل التصويري للمتجهات ، يأتي في المرتبة الأولى من الأهمية ، فبالاعتماد عليه نتمكن من الاعراب عن قانون متوازي الأضلاع الشهير الذي به تجمع المتجهات اذا كانت من جنس واحد وبوجهات مختلفة .

لنعد الآن المتجه أ حـ فى الشكل الـ (٦) يمثل انتقال جسم من أ الى حـ ولنسمه متجه الانتقال Vector of transportation فمما يدعو الى الملاحظة انه اذا صح امكان اختزال الظاهرات الطبيعية الى مجرد تغير فى المواقع ، كما بينا آنفا ، فان انواع المتجهات الطبيعية كافة يمكن فى الحقيقة اختزالها ـ بشكل من الاشكال ـ الى هذا النوع الواحد . ويمكن الوصول الى النتيجة عينها للانتقال النهائى من أ الى حـ ، وذلك بأن يجرى النقل من أ الى ب ثم من ب الى حـ ، أو باكمال متوازى الاضلاع أ ب حـ د ، والانتقال من أ الى د ، ثم من د الى حـ ، ويقال لهذه التنقلات التى اجريت بمثل هذا التتالى ، أنها جمعت . وهذا هو مجرد تعريف لما نعنيه بقولنا : (جمع التنقلات). ولنلاحظ أكثر من ذلك أننا اذا عددنا الخطوط المستقيمة المتوازية خطوطا مرسومة بالوجهة عينها ، فيمكننا ان نعد الانتقالين من ب الى حـ أو من أ الى د كانتقال واحد حدث لجسمين كان موقعاهما البدائيان ب ، أ . وبهذه النظرة يجوز لنا القول بأن الانتقال من أ الى د أجرى على جسم ، أيا كان موقعه ، وليكن ب . وعلى ذلك يكون فى وسعنا القول بأن الانتقال من أ الى حـ يمكن تصوره كمجموع انتقالين من أ الى ب ، ومن أ الى د ، حدثا بأى ترتيب كان . وهكذا نحصل على قانون متوازى الاضلاع لجمع التنقلات ، وهو اذا حدث التنقل من أ الى ب ، ومن أ الى د ، فما علينا الا ان نكمل المتوازى الاضلاع أ ب حـ د فيكون المجموع أ حـ .

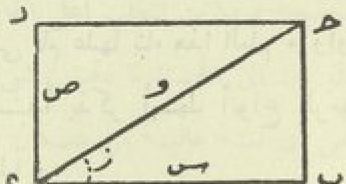
ويلوح كل ذلك بديا كأنه أمر مصطنع ، مع اننا يجب ان نلحظ أن الطبيعة نفسها هي التي تقدم لنا هذه الفكرة • مثال ذلك ، أن باخرة تسير في وجهة أ د (الشكل ـ ٦) وفيها رجل يقطع ظهرها عرضا ، فلو أن الباخرة كانت واقفة لبلغ نقطة ب في دقيقة واحدة • ولكن في تلك الدقيقة تكون نقطة البداية على ظهر الباخرة قد وصلت الى د ، وتحول طريقة من أ ب الى د حـ بحيث اصبح هذا الانتقال ، بالواقع ، من أ الى حـ على سطح البحر • على أن هذا المجموع ظهر لنا محللا الى انتقالين : الاول من أ الى ب بالنسبة للباخرة ، والآخر من أ الى د وهو انتقال الباخرة واذا نظرنا الى عنصر الزمن ، وهو دقيقة واحدة ، فان أ حـ في الشكل يمثل حينئذ سرعة الرجل ، وذلك انه اذا كانت أ حـ تمثل عددا من أقدام الانتقال فانها تمثل العدد نفسه من الأقدام في الدقيقة الواحدة ، أي سرعة الرجل ، وعلى ذلك يمثل أ ب ، أ د سرعتين ، هما سرعة الرجل بالنسبة لسطح الباخرة ، وسرعة الباخرة نفسها • ومن مجموعهما تتألف سرعة الرجل النهائية • ويتضح من ذلك أن الأشكال والتعريفات المتعلقة بهذه التنقلات يمكن تحويلها الى أشكال وتعريفات تتعلق بالسرع ، وذلك بأن تكون التنقلات حدثت في وحدة زمنية • كذلك يمكن تحويل الأشكال والتعريفات ذات العلاقة بالسرع الى أشكال وتعريفات عن العجلة ، وذلك بأن نتصور هذه الأشكال تمثل السرعة الاضافية في وحدة الزمن •

يتضح مما سبق أن ما نعنيه بجمع السرع المتجهة أو العجلات

المتجهة ، هو جمعها بقانون متوازى الأضلاع .

ولما كانت القوة ـ بحسب قوانين الحركة ـ تمثل بالعجلة المتجهة التى تحدثها فى جسم له كتلة معينة ، فأن جمع قوتين لمعرفة أثرهما المشترك ، يكون على حسب قانون متوازى الاضلاع .

ونلخص ما تقدم بان جمع كل متجهين من جنس واحد من المتجهات العلمية الأساسية كالانتقالات والسرع والقوى يتم بوجدان محصلة متجهة على حسب قانون متوازى الأضلاع .



شكل (٧)

يعد المستطيل من أبسط أنواع متوازيات الأضلاع ، وهو فى الرياضيات البحتة يدل على علاقة كثيرة الوقوع بين المتجه الواحد أ حـ والمتجهين المركبين المتعامدين ، أ ب ، أ د (الشكل ـ ٧). فاذا فرضنا أن س ، ص ، و ، تمثل عدد وحدات الطول فى كل من أ ب ، أ د ، أ حـ وان ز تمثل عدد وحدات الزاوية ب أ حـ ، فان العلاقة بين س ، ص ، و ، ز ، بأشكالها الكثيرة هى من الموضوعات الدائمة فى الرياضيات البحتة ، ونتائجها تستخدم فى حساب المتجهات الأساسية فى الفيزياء الرياضية . وهذا الشكل هو الجسر الرئيسى الذى يجب أن تجتازه نتائج الرياضيات البحتة كيما يمكن استخدامها فى حقائق الطبيعة .

الفصل الخامس

رمزية الرياضيات

SYMBOLISM OF MATHEMATICS.

نعود الآن الى الرياضيات البحتة ، لنتعم النظر فى العدد الفكرية التى قام عليها بناء هذا العلم . وأول ما يثير اهتمامنا هو الرمزية فيه . وسنبدأ بذكر أبسط أنواع الرموز ، وهى رموز الحساب المعروفة عالميا .

لنفرض وقتيا ، أن لدينا أفكارا واضحة عن الأعداد الصحيحة ، الممثلة بالاشارات أو الأرقام العربية 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 101, الخ .. ان العرب هم الذين أدخلوا هذه الاشارات الى أوربا ، ويقال انهم استقوها من منابع هندية ، وان أول مؤلف معروف عالج موضوع الارقام بصورة منتظمة ، هو كتاب وضعه رياضى هندى يدعى باسكارا (ولد سنة ١١١٤ ب. م.[1]) . على أن الظهور الفعلى لرموز الارقام يمكن رجع تأريخه الى القرن السابع الميلادى . ويحتمل انها اخترعت فى الاصل فى بلاد التبت . ان بحث

---

١) اننى مدين بتفاصيل الحقائق التاريخية عن الرياضيات البحتة لكتاب « موجز تاريخ الرياضيات » تاليف W. W. R. Ball

تاريخ هذه الارقام أمر تفصيلى بالنسبة الى مقاصدنا الحاضرة ، أما الامر الممتع الذى يجب ملاحظته ، فهو الصورة البليغة التى يعرضها هذا النظام العددي ، فيما للرموز الصالحة من أهمية عظيمة ، ذلك ان هذه الرموز ، تريح الفكر من عناء أعمال ليست ضرورية ، فيتحرر للتفرغ لحل مسائل أعلا • والواقع أنها أدت الى ازدياد القابليات العقلية للنوع البشرى • فقبل استحداث الأرقام العربية ، كانت عملية الضرب شاقة ، أما عملية القسمة ، حتى قسمة الأعداد الصحيحة ، فكانت تتطلب أعلى القابليات الرياضية • وان رياضيا اغريقيا لو عاد الى الحياة لما دهش لشىء من عالمنا الحاضر ، أكثر من دهشه من أن نسبة عالية من سكان أوربا الغربية ، تستطيع ، بتأثير التعليم الاجبارى ، اجراء عمليات القسمة لأكبر الأعداد ، فقد كان ذلك فى نظره ، من المستحيلات • ان توسع نظام العددية وشموله الكسور العشرية ، لم ينجز الا فى القرن السابع عشر • وبراعتنا الآن فى حساب الكسور العشرية واجراء أعمالها بسهولة ويسر ، يكاد يكون النتيجه الخارقة للكشف التدريجى عن نظام تام العددية •

تعد الرياضيات ، فى الأغلب ، علما صعبا وغامضا بسبب ما تستعمله من الرموز العديدة • اذ من البديهى أن لا شىء أشد غموضا من رمزيه لا نفهمها ، كما أنه من الصعب تتبع المقاصد فى رمزية نفهمها جزئيا ولم نعتد استعمالها • شأنها فى ذلك شأن الاصطلاحات الفنية لكل مهنة أو

حرفة ، فتلك أيضا لا تكون مفهومة لدى من لم يتدرب على استعمالها • على أن هذا لا يعنى أنها صعبة فى حد ذاتها ، بل هى على العكس من ذلك ، فهى انما استحدثت لتسهيل الأمور • ومن يتأمل الفكر الرياضية يجد فى الرمزية ، على الدوام ، تيسيرا عظيما ، وفيها عدا فائدتها العلمية ، متعة ذهنية جزيلة ، ذلك أنها تمثل تحليلا لأفكار الموضوع ، بل تكاد تعطى صورة ناطقة للعلاقة بينها • واذا كان لدى احد شك فى فائدة الرموز فليدون بالتمام ، ودون الاستعانة برموز رياضية أية كانت ، المعانى الكاملة التى تنطوى عليها كل من المعاملات الآتية ، التى تمثل شيئاً من الدساتير الأساسية فى الجبر* :ـ

س + ص = ص + س .... (١)

(س + ص) + ع = س + (ص + ع) .... (٢)

س × ص = ص × س .... (٣)

(س × ص) ع = س(ص × ع) .... (٤)

س(ص + ع) = (س × ص) + (س × ع) .... (٥)

ويسمى (١) و (٢) قانونى الابدال والربط فى الجمع و (٣) و(٤) قانونى الابدال والربط فى الضرب أما (٥) فيسمى قانون التوزيع الذى يربط الجمع بالضرب : وكمثال لذلك ، سنعبر عن (١) دون استعمال الرموز ، فنقول اذا أضفنا عددا ثانيا الى عدد مفروض اياً كان نحصل على النتيجة نفسها كما لو أضفنا العدد المفروض الى العدد الثانى •

---

* راجع الملاحظة (أ) فى اخر الكتاب •

يتبين من هذا المثال ، أننا باستعانتنا بالرمزية ، نستطيع اجتياز مراحل فى التعليل بواسطة العين وبصورة آلية (ميكانيكية) تقريبا ، مايتطلب ، بخلاف ذلك ، استعمال القوى العقلية العليا .

ومن الخطأ الفاحش الذى يعده فريق حقيقة مسلمة ، وهو الذى كثيرا مارددته كتب الحكم والامثال وألسن الخطباء الناصحين ، أن نقول بان علينا أن نربى عادة التفكير فيما نعمل ، اذ أن القضية على النقيض من ذلك . فالحضارة تتقدم بالاكثار من عدد العمليات المهمة التى نستطيع اجراءها دون تفكير بها وان عملية التفكير ، يجب ادخارها لحين الحاجة اليها . فهى أشبه ماتكون بفرقة الفرسان المعدة للاغارة ، حيث يكون عدد الابطال المنتخبين محددا ، والخيل على أهبة ، ولكنها لاتقوم بعملها الا فى اللحظات الحاسمة .

من الخواص التى يجب توفرها فى الرمزية ، أن تكون موجزة ، بحيث ترى بلمحة عين وتكتب بسرعة . وليس فى الوسع وضع الرموز بصورة أخصر من وضعها متجاورة ، الواحد بجانب الآخر دون فاصل ، اذ فى الرمزية الجيدة ، يكون لتجاور الرموز المهمة معنى مهم . وهذه احدى مزايا رموز العدية العربية ، حيث يمكن ، مع الزهيد من الانتباه ، لتجاور الارقام ، كتابة عدد ايا كان اطلاقا بدلالة الارقام العشرة . و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ .

كذلك فى الجبر ، اذ كان لدينا عددان متغيران مثل (س ، ص) فعلينا أن نختار معنى لما نقصده ، عند وضعهما متجاورين هكذا س ص . ان اهم

فكرتين بين يدينا الآن هما فكرتا الجمع والضرب . وقد اصطلح الرياضيون ، كيما تكون رمزيتهم أكثر ايجازا ، على أن س ص تدل على س × ص . وعلى ذلك فالقوانين (٣) و (٤) و (٥) تكتب على العموم بالشكل :

س ص = ص س ، (س ص) ع = س (ص ع) ،
س (ص + ع) = س ص + س ع .

وبذلك وفقوا لربح كبير في الايجاز بالتعبير . وتطبق هذه القاعدة الرمزية نفسها في حالة مجاورة عدد ثابت لآخر متغير ، فنكتب ٣ س ، بدلا عن ٣ × س و ٣٠ س بدلا عن ٣٠ × س ومن الواضح أن علينا ، عندما نعوض عن الاعداد المتغيرة بأعداد ثابتة ، ان لاننسى اعادة الاشارة × لكيلا نعارض نظام العدية العربي . فاذا عوضنا عن س باثنين وعن ص بثلاثة في س ص ، وجب كتابة ذلك ٢ × ٣ وليس ٣٢ التي تعني ٢ + ٣٠ .

ومن الممتع أن نلاحظ أن من الرموز ما يكون ، على تفاهة مظهره ، ذا أهمية في تقدم العلم فيشير الى تأكيد فكرة قد تكون في غاية الدقة ، ولكن وجوده يجعل من السهل وضوح علاقة هذه الفكرة بكافة المجموعات الفكرية المركبة التي هي من ضمنها . مثال ذلك أن نأخذ أبسط الرموز كافة أي (٠) وهو يمثل العدد « صفر » . ان نظام العدية الروماني لم يتضمن رمزاً للصفر ، وان معظم رياضي العالم القديم ليقعون في الحيرة والذهول ازاء فكرة العدد « الصفر » لانها فكرة دقيقة

جدا ، وليست واضحة على كل حال • وانك لواجد فى البحوث الفلسفية مساجلات طويلة فى معنى الكمية الصفر • والحقيقة المحضة هى أن الصفر ، كفكرة ، ليس اصعب ولا أدق من الاعداد الاساسية الاخرى • فماذا نقصد بـ ١ أو ٢ أو ٣ •• ؟؟ ولكننا اعتدنا استعمال هذه الفكر ، ومع ذلك قد يقف كثير منا حيارى لو طلب منهم اعطاء تحليل واضح للفكر الفرعية التى تدخل فى تكوينها • على أن مايلفت النظر فى الصفر هو عدم الاحتياج اليه فى اعمال الحياة اليومية ، فلن يذهب أحد لشراء صفر من السمك • فهو من ناحيـة ما ، أكثر جميع الارقام الرئيسيـة قربا للحضارة ، ذلك أن أساليب التفكير المثقف وحاجاته وحدها ، هى التى فرضت علينا استعمال الرمز (٠) الذى يمثل العدد « الصفر » ، لما فى ذلك من فوائد جمة •

أحدث هذا الرمز فى سياق نظام العدية العـــربى ويعد جزءا رئيساً منه • ففى ذلك النظام تتوقف قيمة الرقم على موقعه فى العدد • فانظر مثلا الى الرقم **٥** ، كما هو واقع فى الاعداد **٢٥** و **٥١** و **٣٥١٢** و **٥٢١٣** • ففى العدد الاول ، يدل الرقم **٥** على خمسة ، أما فى العدد الثانى ، فيدل الرقم **٥** على خمسين ، وفى الثالث على خمسمائة ، وفى الرابع على خمسة آلاف • فاذا ما اردنا كتـابة العدد واحد وخمسين بالشـكل الرمزى **٥١** ، فان الرقم **١** يدفع الرقم **٥** الى الموقع الثـانى (يحسب من اليمين الى اليسار) وبذلك تصبح قيمته خمسين • اما اذا اردنا كتابة العدد خمسين بالذات ، فلا يوجد لدينا رقم **١** مثلا ، ليقوم بهذه الخدمة ، وعلى ذلك ، يقتضى أن نضع رقما فى مرتبة الآحاد ،

بحيث لايزيد شيئا على المجموع ، ولكنه يدفع الرقم ٥ الى الموقع الثانى • ويقوم بهذه الخدمة (٠) أى رمز الصفر • ومن الراجح جدا ، أن الذين استحدثوا الرمز (٠) ، لم تكن لديهم فكرة واضحة عن العدد « صفر » ، بل كل ما ارادوه ، اشارة ترمز الى وجود لاشيء فى محل الرقم الذى تشغله • ويرجح ان فكرة العدد صفر ، نشأت بالتدريج عن الرغبة فى تشبيه معنى هذه الاشارة بمعانى الاشارات ١ و ٢ و ٠٠٠٠ و ٩ التى تمثل اعدادا اساسية • وليست هذه هى الحالة الوحيدة التى تجد فيها ان فكرة دقيقة استحدثت فى الرياضيات بسبب رمزية فرضتها فى الاصل ، مقتضيات السهولة العملية •

وهكذا فان اول استعمال للصفر كان لجعل العدية العربية ممكنة ، وهى خدمة ليست بالضئيلة • وفى وسعنا أن نتصور ، بعد أن استحدث الصفر لهذه الغاية ، أن الرجال العمليين ، من ذلك النوع الذى يكره الاراء البديعة ، استهجنوا اعتداد الصفر عددا ، وعدوا ذلك عادة سخيفة ، ولكنهم كانوا مخطئين ، كما هو الحال دائما مع مثل هؤلاء الناس الذين لايستسيغون مضغ طعام أعده آخرون ، لان الخدمة الثانية التى أداها الرمز (٠) تعتمد فى جوهرها على وظيفة تمثيله للعدد « الصفر » •

ان هذا الاستعمال الرمزى الثانى ، يلوح عند أول نظرة ، من السذاجة ، بحيث يصعب على المبتدىء ادراك أهميته • ولنبدأ بمثال بسيط : تكلمنا فى الفصل الثانى على العلاقة بين عددين متغيرين س ،

ص مرتبطين بالمعادلة س + ص = ١ ، وقلنا بامكانية تمثيل هـذه العلاقة بأشكال غير محدودة العدد ، مثل س = ١ - ص ، ص = ١ - س ، ٢س + ٣ص - ١ = س + ٢ص وهكـذا ، ولكن الطريقة المهمة للتعبير عنهـا هى س + ص - ١ = ٠ ، كذلك ان الطريقة المهمة ، لكتابة المعادلة س = ١ ، هى س - ١ = ٠ وللمعادلة ٣س - ٢ = ٢س^{٢} ، هى ٢س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠ أى أن مـا نقصده ، هو أن تكون جميع الرموز ، سواء منها مامثل اعدادا متغيرة مثل س ، ص وما مثل اعدادا ثابتة عدا الصفر مثل ١ ، ٢ فى الامثلة أعلاه ، على الجهة اليمنى ، بحيث تساوى هذه الجهة العدد صفر . ويقال أن اول من فعـل ذلك هو توماس هـاربرت من اهـل أكسـفورد (١٥٦٠ - ١٦٢١) . ولكن ما أهمية هذا التصرف الرمزى البسيط ؟ انه جعل من الممكن ، نماء الفكرة الحديثة عن (الصيغة الجبرية) .

وسنجـد ان علينا ان نرجع الى هـذه الفكرة على الدوام . ولن نذهب بعيدا اذا قلنا ، انه لايمكن فهم قسم أيا كان ، من الرياضيات الحديثة دون الرجوع اليها دوما . ان فكرة الصيغة هذه عمومية الى درجـة يصعب معها تحديدها بعبارات مجردة ، وفى هذه المرحلة ، نحسن صنعا اذا اكتفينا بملاحظة شيء من الامثلة . فالمعادلات ٢ س - ٣ = ٠ ، س - ١ = ٠ ، س - ٦ = ٠ كلها معادلات ذات صيغة واحدة ، أى انها معادلات ذات مجهول واحد (س) غير مضروب بنفسه ، ولا يظهر فيهـا س^{٢} ، س^{٣} .. الخ . كذلك المعادلات ٣ س^{٢} - ٢ س + ١ = ٠ ، س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠ ، س^{٢} - ٤ = ٠ ذات

صيغة واحدة أي انها معادلات ذات مجهول واحد س ، وقد ظهر فيها س × س أى $س^{٢}$ ، وتسمى معادلات تربيعية • وكذلك المعادلات التكعيبية ، وهي التي يظهر فيها $س^{٣}$ ، تعطينا صيغة أخرى وهكذا • واذا نظرنا الى المعادلات التربيعية الثلاث ، نجد فرقا صغيرا ، بين المعادلة الاخيرة $س^{٢} - ٤ = ٠$ والمعادلتين اللتين تسبقانها ، ناشئا عن عدم ظهور س (وهي غير $س^{٢}$) في الاخيرة ، وظهورها في الاولين • ان هذا الفرق تافه جدا اذا ماقوبل بالحقيقة المهمة وهي ان الثلاث معادلات تربيعية •

وفوق ذلك توجد صيغ من المعادلات تبين العلاقة بين متغيرين ، مثل س + ص - ١ = ٠ ، ٢س + ٣ ص - ١ = ٠ وغيرها ، وهي امثلة لما يدعى بالصيغة الخطية للمعادلة • وسبب تسميتها بالخطية ، ان طريقة الرسم البياني التي شرحناها ، في ختام الفصل الثاني ، تمثل هذه المعادلات بخط مستقيم • وتوجد كذلك صيغ أخرى للمتغيرين ، مثل الصيغة التربيعية والتكعيبية •••• الخ • ولكن النقطة التي نؤكدها هي أن هذه الدراسة للصيغة ، تكون اكثر يسرا ، بل ممكنة ، اذا اتبعت الطريقة الانموذجية في كتابة المعادلات ، بحيث يكون الرمز (٠) على الجهة اليسرى • وزيادة على ذلك يؤدى الـ (٠) وظيفة اخرى ، تتعلق بدراسة الصيغة • فمهما كانت قيمة س فأن ٠ × س = ٠ وان س + ٠ = س وبهذه الخواص يمكن تسوية الاختلافات الصغيرة في الصيغة • مثال ذلك ان الفرق الذي ذكرناه اعلاه بين المعادلتين

التربيعتين :

س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ ، س^{٢} – ٤ = ٠ يمكن محوه ، وذلك بان نكتب المعادلة الثانية بالشكل : س^{٢} + (٠ × س) – ٤ = ٠ فبالاستناد الى القانونين المذكورين اعلاه ، يكون س^{٢} + (٠ × س) – ٤ = س^{٢} + ٠ – ٤ = س^{٢} – ٤ = ٠ وبناء على ذلك تمثل المعادلة س^{٢} – ٤ = ٠ نوعا خاصا من المعادلات التربيعية ، وهى من الصيغة العامة نفسها ، التى تنتسب اليها المعادلة س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠

ولهذه الاسباب الثلاثة ، يعد الرمز صفر ، الممثل للعدد صفر ، من مستلزمات الرياضيات الحديثة • وهو الذى جعل من الممكن اجراء أنواع من التحريات ، كان من المستحيل أن تجرى من دونه •

ان رمزية الرياضيات ، هى فى الحقيقة ، ثمرة الافكار العامة التى تسيطر على العلم • وبازائنا الآن من هذا القبيل فكرتان عامتان • الاولى عن المتغير والثانية عن الصيغة الجبرية • وقد فرض اتصال هاتين الفكرتين على الرياضيات نوعا آخر من الرمزية ، يعد على طرافته ، ذا أثر فعال فيها • فقد علمنا أن كل معادلة ، ذات متغيرين مثل س ، ص تمثل رابطة خاصة بين هذين الزوجين من المتغيرات ، وهكذا تكون س + ص – ١ = ٠ تمثل رابطة واحدة معينة و ٣ س + ٢ ص – ٥ = ٠ تمثل رابطة معينة أخرى بين المتغيرين س ، ص • الا ان كلا من هاتين الرابطتين ذات صيغة ، سبق وسميناها بالرابطة الخطية • ولنسأل الآن ،

كيف نتمكن من تمثيل رابطة خطية أية كانت ، بين العددين المتغيرين س ، ص ؟ أعني أننا نريد أن نمثل بالطريقة الرمزية رابطة خطية أية كانت ، كما تمثل س عددا من الاعداد • ويتم ذلك بتبديل الاعداد الموجودة فى الرابطة المعينة ٣ س + ٢ س - ٥ = • بأحرف فينتج لدينا أس + ب‌ص - ج = • ، أى أن أ ، ب ، ج تقوم مقام اعداد متغيرة ، كما تقوم س ، ص • على أن هناك فرقا فى استعمال هذين الطقمين من المتغيرات ، ذلك أننا عندما ندرس الخواص العامة للعلاقة بين س ، ص يجب أن نعد قيم أ ، ب ، ج ثابتة ولكن من دون تعيين مقاديرها على وجه التحديد ، فمهما كانت المقادير هذه ، فهى ستبقى ثابتة فى اثناء النظر فى العلاقة بين المتغيرين س ، ص ولكافة القيم الممكنة لهما • ومما تجب ملاحظته ، أننا بسبب عدم وضعنا قيما معينة لكل من أ ، ب ، ج ، نكون ، عند وجداننا خواص هذه العلاقة ، قد برهنا على أنها خواص تعود الى اية علاقة من هذا القبيل بين س ، ص • فاذا ما غيرنا الآن قيم أ ، ب ، ج نتوصل الى فكرة أن أس + ب‌ص - ج = • تمثل رابطة خطية متغيرة بين س ، ص • وتدعى المتغيرات الثلاث أ ، ب ، ج بالثوابت اذا ماقابلناها مع س ، ص • والمتغيرات التى تستعمل بهذا الشكل تسمى أحيانا بالبرامترات ايضا •

اعتاد الرياضيون أن يعفوا أنفسهم من عناء أن يبينوا أى متغيراتهم « ثابتة » ، وايها « متغيرة » تعد العلاقة فيما بينها هى الاصل فى المعادلة ، وذلك بأن يستعملوا الحروف الاخيرة من الالفباء للمتغيرات « المتغيرة » ،

والحروف الاولى منها للمتغيرات « الثابتة » أي البرامترات ، ويلتقي هذان النظامان في وسط الالفباء . وقد يتطلب الامر أحيانا كلمة أو كلمتين من الايضاح ، الا ان العرف والسياق المنطقي ، يغنيان عن ذلك اعتياديا . ومن المدهش ندرة الالتباس الذي ينجم عن تصرف سائب كهذا .

ولقد كانت نتيجة هذا الحذف المستمر للاعداد المعينة ، والاستعاضة عنها بطبقات متتالية من البرامترات ، أن أصبح مقدار الحسابات العددية ضئيلا جدا ، فالكثير من الرياضيين لايستسيغون هذه الحسابات ، بل قد تعوزهم المهارة الخاصة فيها . ان حقل علم الحساب ينتهي حيث تبدأ سيطرة فكرة المتغيرات والصيغة الجبرية .

الفصل السادس

تعميمات العدد

GENERALIZATIONS OF NUMBERS

من الميزات العظيمة للرياضيات تلك المجموعة المؤلفة من الفكر المتسقة التى اخترعت ، بمناسبة الاعداد الصحيحة التى بدأنا بها • ويجوز تسمية هذه الفكر بامتدادات أو تعميمات العدد • ولدينا منها أولا فكرة الكسور • ان اول بحث وقع بين أيدينا عن علم الحساب ، كان لكاهن مصرى اسمه (أهمس) ، كتبه فيما بين سنة ١٧٠٠ ق • م وسنة ١١٠٠ ق • م ويرجح أنه كان منقولا عن نسخة أقدم منه بكثير ، ومعظم بحثه يدور على خواص الكسور • ويظهر من ذلك أن نشوء هذه الفكرة (فكرة الكسور) قديم جدا فى تاريخ الرياضيات • والحقيقة ان الموضوع كان بارزا للعيان • فمن العمليات الشائعة الحدوث اذ ذاك ، تقسيم حقل الى ثلاثة أقسام متساوية واخذ قسمين منها ، لذلك يجب أن لا نستغرب اذا كان رجال الحضارات القديمة ، قد ألفوا فكرة الثلثين وما جانسها من أفكار • ويصح ان نقول ، ان فكرة الكسور كانت أول تعميم للعدد • أما الاغريق فقد فكروا فى هذا الموضوع على أساس النسبة ،

فكان اليونانى يرى من الطبيعى أن يقول عند مقابلة خط طوله قدمين بخط طوله ٣ اقدام ، بأن طوليهما بنسبة ٢ الى ٣ . أما نحن ، فبتأثير المصطلحات الجبرية ، يغلب علينا أن نقول ان طول الخط الاول ثلثا طول الخط الثانى ، ونفكر فى الثلثين كعدد مضروب فيه .

وعلى ذكر نظرية النسبة أو الكسور نقول ان اليونانيين قامـوا بكشف عظيم ، كان موضع الكثير من التفكير الفلسفى والرياضى . اذ وجدوا النسب اللاقياسية[١]، وبرهنوا حقا ، فى اثناء تحرياتهم الهندسية ، على أنه لو أخذ خط ، أيا كان طوله ، فمن المحتم وجود خطوط أخرى لاتكون نسبة أطوالها للخط الاول كالنسبة بين عددين صحيحـين . وبتعبير آخر توجد أطوال ليست كسورا مضبوطة من أطوال أخرى .

مثال ذلك ، ان قطر المربع لايمكن أن يعبر عنه ككسر ما ، من ضلعه . وفى المصطلحات الحديثة نقول ان طول القطر هو $\sqrt{٢}$ من طول الضلع ولكن الكسر الذى يمثل $\sqrt{٢}$ هذه بتمامها لا وجود له ، بل كل مايمكن عمله ، هو التقرب من قيمتها الكاملة الى الحـد الذى نريده ، مع عدم امكان الوصول اليها بتاتا . فنقول مثلا أن $\frac{٤٩}{٢٥}$ تنقص قليلا عن ٢ وان $\frac{٩}{٤}$ أكبر منها ، وعليه فـ $\sqrt{٢}$ تقع بين $\frac{٧}{٥}$ و $\frac{٣}{٢}$. ولكن أفضل طريقة منظمة للتقـرب من $\sqrt{٢}$ هى الحصـول على سلسلة من الكسـور العشرية ، يكون كل منها أكبر من سابقـه ويتم ذلك باستخراج جذرها التربيعى بالطريقة المعتادة . وهذه السلسلة هى

---

(١) Incommensurable ratios

١ و $\frac{١٤}{١٠}$ و $\frac{١٤١}{١٠٠}$ و $\frac{١٤١٤}{١٠٠٠}$ وهكذا .

كان الاغريق يسمون نسبا كهذه (لاقياسية) . وقد أثارت هذه النسب منذ أيام الاغريق حتى العصور الاخيرة نقاشا فلسفيا عظيما . ولم تحل المشكلات المتعلقة بها الا حديثا .

سنضع النسب اللاقياسية مع الكسور ، وسنعد جملة الاعداد الصحيحة والاعداد الكسرية والاعداد اللاقياسية صنفا واحدا من الاعداد ، ندعوه بـ « الاعداد الحقيقية » . واذ كنا دوما ، نتصور الاعداد الحقيقية مرتبة على حسب أقدارها ، فنبدأ بالصفر وتذهب متصاعدة في الكبر دون حدود كلما تقدمنا ، لذلك وللسهولة ، تمثل الاعداد الحقيقية بنقاط على خط :

٤   $\frac{٧}{٢}$ ٣ $\frac{٥}{٢}$ ٢ $\frac{٣}{٢}$ ١ $\frac{١}{٢}$

س   د   ك   ج   ق   ب   ن   أ   و   م

ليكن م س أي خط يبدأ بـ (م) ويمتد الى غير حد بالوجهة م س . خذ الآن أية نقطة مناسبة عليه مثل أ ، بحيث يمثل م أ وحدة الطول . ثم اقطع الاطوال أ ب ، ب ج ، ج د .. الخ بحيث يكون كل منها مساويا الى م أ ، فعند ذلك تمثل النقطة م العدد صفر ، والنقطة أ العدد واحد ، و (ب) العدد ٢ ، وهكذا . والواقع أن العدد الذي تمثله أية نقطة هو قياس بعدها عن م بدلالة وحدة الطول م أ . أما النقاط الواقعة بين م ، أ فتمثل الكسور الحقيقية والاعداد اللاقياسية التي تكون أقل من (١) . فمنتصف م أ يمثل $\frac{١}{٢}$ ، ومنتصف أ ب يمثل $\frac{٣}{٢}$ ، ومنتصف ب ج يمثل $\frac{٥}{٢}$ ، وهكذا . وبهذه الوسيلة تمثل كل نقطة

على م س عددا حقيقيا ما ، وكل عدد حقيقي يمثل نقطة ما على م س •

وهذه السلسلة أو الصف من النقاط ، الواقعة على م س التى تبدأ بـ (م) وتتحرك بانتظام بالوجهة من م الى س ، تمثل الاعداد الحقيقية مرتبة بنظام تصاعدى فى الكبر ، مبتدئة بالصفر ، وتزداد باستمرار كلما تقدمنا •

ان ذلك كله يلوح أمرا هينا • ولكن ، حتى فى هذه المرحلة ، توجد آراء مهمة يمكن استنباطها بالركون الى هذه الحقائق الواضحة • لنأخذسلسلة النقاط التى تمثل الاعداد الصحيحة فقط ، أى النقاط م ، أ ، ب ، ج ، د ، فنجد أن النقطة الاولى م نقطة معينة ، تتلوها نقطة أ • وكل نقطة مثل أ أو ب لها نقطة معينة تسبقها مباشرة وأخرى تتلوها مباشرة ، عدى م التى لاسابقة لها • زد على ذلك ان هذه السلسلة تستمر بلا حد ولا نهاية • وهذا النوع من الترتيب ، هو الذى يدعى بنوع ترتيب الاعداد الصحيحة • وخلاصته ، أن يكون لكل بيت ما يجاوره من جهتيه ، عدا البيت الاول من صف البيوت • خذ بعد ذلك ، الاعداد الصحيحة والكسور معا مهملا النقاط التى تقابل النسب اللاقياسية فان نوع الترتيب المتسلسل الذى نحصل عليه الآن ، يختلف تماما عما ذكرناه • فالحد الاول م ، ولكن لايوجد حد له ما يسبقه مباشرة أو يتلوه مباشرة • وهذا أمر واضح اذ يمكن دوما وجدان كسر تقع قيمته بين قيمتى أى كسرين • ومن الطرق السهلة جدا لعمل

ذلك ، أن تجمع الكسرين وتنصف المجموع . مثال ذلك : ان بين قيمتي $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٣}{٤}$ يقع الكسر $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٣}{٤}$) أي $\frac{١٧}{٢٤}$ وبين $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{١٧}{٢٤}$ يقع الكسر $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١٧}{٢٤}$) اى $\frac{٣٣}{٤٨}$ وهكذا الى مالا حد له . بسبب هذه الخاصية يقال فى هذه السلسلة انها (متراصة) . كذلك لاتوجد نقطة نهائية لهذه السلسلة التى تزداد بصورة مطلقة ، وبلا حد ، كلما تقدمنا على الخط م س . وقد يجول فى الخاطر ، عند النظرة الاولى ، أن نوع السلسلة ، التى ألفناها بهذه الطريقة ، من الكسور ، والمتضمنة الاعداد الصحيحة ايضا ، هو نوع السلسلة نفسه الذى يمكن الحصول عليه من جميع الاعداد الحقيقية ، وهى الاعداد الصحيحة والكسور واللاقياسيات مجتمعة ، اى من جميع نقاط الخط م س . ان كل ماقلناه حتى الآن عن سلسلة الكسور ينطبق بالدرجة نفسها على سلسلة الاعداد الحقيقية جميعها ، ولكن توجد بعض الفروق المهمة التى سنتقدم لكشفها الآن . ان اهمال اللاقياسيات فى سلسلة الكسور ، يؤدى الى فقدان النقاط الفاصلة بين قسم من الاصناف . فلو أخذنا اللاقياسى $\sqrt{٢}$ نجد ان موقعه فى سلسلة الاعداد الحقيقية يفصل بين كافة الاعداد التى مربعها أقل من ٢ ، وكافة الاعداد التى مربعها اكبر من ٢ . غير اننا اذا لازمنا سلسلة الكسور وحدها ، واهملنا اللاقياسيات بحيث اننا لا ندخل $\sqrt{٢}$ فيها ، فلن نجد كسرا يقسم السلسلة الى قسمين بهذا الشكل ، أى ان يكون مربع كافة الحدود فى احدى جهتيه أصغر من ٢ ، وفى الجهة الثانية اكبر من ٢ . وعلى ذلك ،

نجد فى سلسلة الكسور شبه ثغرة ، فى المحل الذى يجب ان تكون فيه √٢ • وقد يرى ناس ان وجود اشباه الثغرات أمر تافه • ولكن الرياضى كائنا من كان ، تفق له ان يقرأ هذا ، يعلم ان احتمال فقدان الحدود لصنف من الاعداد او لنهاياتها العظمى ، تلك التى لم تأخذ حتى الآن مواقعها فى السلسلة ، أمر ضرره ليس بالقليل• ولتجنب هذه المشكلة اقتضى الرجوع الى اللاقياسيات وادخالها ، حتى يتم الحصول على سلسلة كاملة بلا ثغرات •

ويوجد فرق اعمق اساسا بين السلسلتين ، اذ نستطيع ترتيب الكسور كالاعداد الصحيحة ، أى ان يكون لها حد أول ، وان يكون لكل حد ما يتلوه مباشرة ، وباستثناء الحد الاول ما يسبقه مباشرة ، وسنبين كيفية اجراء ذلك • لنكتب كل حد من سلسلة الكسور والاعداد الصحيحة على شكل كسر ، فنكتب ١/١ بدلا عن ١ و ٢/١ بدلا عن ٢ وهكذا للاعداد الصحيحة كافة باستثناء الصفر • كذلك سنعد وقتيا ، الكسور المتساوية فى القيمة التى لم تختصر الى ابسط اشكالها كسورا مستقلة، وعلى ذلك، والى اشعار آخر، سنعد مثلا ٢/٣ و ٤/٦ و ٦/٩ و ٨/١٢ كسورا متميزة بعضها عن بعض • والآن ضع الكسور على شكل مجموعات بحيث تقسمها الى اصناف ، وذلك بأن تجد مجموع البسط والمقام لكل كسر • وللايجاز سنسمى هذا المجموع دليل الكسر • مثال ذلك :

ان ٧ هي دليل الكسر $\frac{٤}{٣}$ وهي ايضا دليل $\frac{٣}{٤}$ و $\frac{٢}{٥}$. ثم ضع في كل صنف جميع الكسور التي لها دليل واحد معين ، وعلى ذلك يمكن تسميته (أي الدليل) دليل الصنف . والآن رتب هذه الاصناف على حسب مقدار دليل كل منها . فالصنف الاول يكون دليله ٢ ، والعضو الوحيد الذي فيه هو $\frac{١}{١}$. والصنف الثاني يكون دليله ٣ ، واعضاؤه $\frac{١}{٢}$ و $\frac{٢}{١}$. والصنف الثالث يكون دليله ٤، واعضاؤه $\frac{١}{٣}$ و $\frac{٢}{٢}$ و $\frac{٣}{١}$. والصنف الرابع يكون دليله ٥ ، واعضاؤه $\frac{١}{٤}$ و $\frac{٢}{٣}$ و $\frac{٣}{٢}$ و $\frac{٤}{١}$ وهكذا الخ . ومن السهل ان نرى ان عدد الحدود (الاعضاء) في كل صنف (بما فيها من الكسور غير المختزلة الى ابسط اشكالها) يقل بواحد عن دليله . كذلك يمكن ان ترتب اعضاء صنف واحد أيا كان ، بحيث يكون العضو الاول فيها كسراً بسطه ١ ، والعضو الثاني بسطه ٢ ، وهكذا حتى نصل الى ن ـ ١ ، اذا كان الدليل ن . وعليه فالصنف الذي دليله ن تكون اعضاؤه على الترتيب الآتي $\frac{١}{ن-١}$ و $\frac{٢}{ن-٢}$ و $\frac{٣}{ن-٣}$ ... . $\frac{ن-١}{١}$. وفي الواقع كانت اعضاء الاصناف الاربعة التي ذكرت آنفا بهذا الترتيب . وبهذه الواسطة نكون قد رتبنا الكسور كافة ، كترتيب الاعداد الصحيحة ، فتأخذ الشكل الآتي :

$$\frac{١}{١} ، \frac{١}{٢} ، \frac{٢}{١} ، \frac{١}{٣} ، \left|\frac{٢}{٢}\right| ، \frac{٣}{١} ، \frac{١}{٤} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٤}{١}$$

$$...... \frac{ن-٢}{١} ، \frac{١}{ن-١} ، \frac{٢}{ن-٢} ، \frac{٣}{ن-٣} ... \frac{ن-١}{١} ، \frac{١}{ن} \text{ الخ .}$$

ان فى وسعنا التخلص من تكرار الكسور ذات القيمـة الواحدة بشطبهـا حيثما كانت بعد ظهورها للمرة الاولى • ففى الحـدود القليلة الاولى اعلاه ، نجد ان $\frac{2}{2}$ الموضوعة داخل قوسين ، هى الكسر الوحيد الذى لم يكن بأبسط اشكاله ، وقد ظهر سابقا بالشكل $\frac{1}{1}$ ، وعليه يجب شطبه • ولكن السلسلة لا زالت تحمل الخواص انفسها ، وهى (أ) لها حد اول و (ب) لكل حد ما يجاوره من جهتيه و (ج) لا نهاية للسلسلة•

وفى الوسع البرهان على ان ليس فى الامكان ترتيب جميع الاعداد الحقيقية على هذا الشكل ، وقد كشف عن هذه الحقيقة العجيبة ، الرياضى الالمانى جورج كنتور الذى لا يزال حيا[1] ، وهى ذات أهميـة كبيرة فى فلسفة الآراء الرياضية • اننا هنا نمس فى الواقع حدود المسـائل العظيمة عن معنى الاطراد (واللانهاية) •

وللعدد امتـداد آخر ، يتأتى من ادخال الفكرة التى اختلف فى تسميتها بعمليـة او بخطـوة ، وكلا الاسمـين يصح من وجهتى نظر مختلفتين قليلا • وسنبدأ بقضية معينة • لنأخذ الافادة ٢ + ٣ = ٥ ، وهى ان نضيف ٢ الى ٣ فينتج ٥• فكر بعلمية اضافة الـ ٣ ، ولنعبر عنها بقولنا +٣ • كذلك ٤ - ٣ = ١ فكر الآن بعملية طرح الـ ٣ ولنعبر عنها بقولنا -٣ • وبذلك بدلا من ان ننظر للاعداد الحقيقيـة بذاتها ، فاننا ننظر فى عمليات جمعها او طرحها • فبدلا من ٢ نأخذ +٢ او -٢ ،

---

(١) قيل هذا فى سنة ١٩١١ وقد توفى عام ١٩١٨ •

اى عمليات اضافة ٢ او طرح ٢ ، وبعد ذلك نتمكن من جمع هذه العمليات ، ويكون هذا الجمع ، طبعا ، بمعنى يختلف عما نستعمله فى جمع الارقام . ان مجموع عمليتين هو عملية واحدة تعطى نفس النتيجة التى نحصل عليها من استعمال العمليتين بصورة متتالية . ولكن بأى ترتيب يجب اجراء العمليتين ؟ والجواب ان ذلك لا أهمية له . مثال ذلك ان :

٢ + ٣ + ١ = ٢ + ١ + ٣

أى ان جمع الخطوتين +٣ و +١ قابل للابدال .

ان للرياضيين تقليدا يشوش على المشتغلين فى تتبع المعانى ، ولكنه مريح عند الممارسة ، وهو استعمال الرمز نفسه بمعان مختلفة ، ولو انها متقاربة . والشرط الاساسى للرمز ، فى نظرهم ، هو ان تكون القوانين الاصولية لاستعماله واحدة ، مهما تنوع معناه . وعلى هذه العادة او التقليد ، يشار لجمع العملياب بـ + كما هو الحال فى جمع الاعداد . وعلى ذلك يمكن ان تكتب :

(+٣) + (+١) = +٤

حيث تدل الـ + فى وسط الجهة اليمنى من المعادلة ، على جمع العمليتين +٣ و +١ . الا انه لا داعى لان نكون متحذلقين جدا فى رمزيتنا الا فى الاحوال النادرة ، التى تتطلب منا تتبعا مباشرا للمعانى . ولذلك نحن نسقط الـ + الاولى فى السطر وفى القوس ، ولا نكتب بتاتا اشارتى + متتاليتين ، وعلى ذلك تصبح المعادلة اعلاه ٣ + ١ = ٤ .

ونفسرها بأنها جمع بسيط لعددين او ، باتقان اكثر ، بانها جمع عمليتين ، كما عبرنا عنها بالضبط ، فى كتابتنا للمعادلة بالطريقة السابقة ، او اخيرا ، بانها تعبر عن نتيجة استعمال عملية + ١ الى العدد ٣ والحصول على العدد ٤ • وكل تفسير ممكن ، يكون دوما صحيحا • ولكن التفسير الوحيد ، الذى يكون دوما فى الامكان تحت شروط خاصة ، هو جمع العمليات • اما التفاسير الاخرى فكثيرا ماتولد نتائج غير معقولة •

ان ذلك يؤدى من فوره الى سؤال ، لاريب فى أنه ، كان يرد بالحاح على ذهن القارىء ، وهو ما فائدة هذا التفصيل ؟ ولاشك ان الرجل العملى يتقدم فى هذا الموقف ويطلب باصرار محو هذه الاحابيل الفكرية السخيفة • اما الجواب عن هذا ، فهو ان الرياضى يرمى من وراء ذلك الى العمومية ، وهى فكرة جديدة بأن توضع فى صف فكرة التغير والصيغة ، وذلك لما لها من أهمية فى التحكم بالتصرف الرياضى • وان الغريزة الرياضية تنفر من كل قيد لعمومية النظريات او البراهين أو التفاسير • وان هذه الفكر الثلاث ، المتغير والصيغة والعمومية تؤلف ثالوثا رياضيا يسيطر على الموضوع برمته • وهى جميعا تنبت من اصل واحد ، هو الطبيعة المجردة لهذا العلم •

ولننظر الآن كيف تتحقق العمومية بادخال فكرة العمليات • خذ المعادلة س + ١ = ٣ • ان حلها س = ٢ • وهنا نستطيع ان نفسر رموزنا بأنها مجرد اعداد ، ويكون الالتجاء ، فى هذه الحالة ، الى فكرة العمليات أمر لاضرورة له بتاتا • ولكن س اذا كانت مجرد عدد ، فان المعادلة

س + ٣ = ١ تكون بلا معنى ، لان س يجب ان تكون عدد الاشياء الباقية اذا اخذت ٣ اشياء من شيء واحد • وعمل كهذا غير ممكن • وفى هذه النقطة ، نستعين بفكرة الصيغة الجبرية ، وهى بحد ذاتها تعميم بمظهر آخر ، ولذلك نأخذ المعادلة العامة التى لها صيغة المعادلة س + ١ = ٣ نفسها ، وهى س + أ = ب ، وحلها هو س = ب - أ • وهنا تزداد مشكلتنا شدة ، لان هذه الصيغة لا يمكن استعمالها اذا اقتضى الامر اجراء تفسير عددى ، الا اذا كانت ب اكبر من أ • أى انه لا يسوغ لنا ان نقول بجواز اعتبار أ و ب أى عددين ثابتين دون شرط ما • وبتعبير آخر نكون قد وضعنا قيدا ، لقابلية تغيّر العددين الثابتين أ و ب ، نجرّه كسلسلة خلال جميع مناقشاتنا • ويستحيل اجراء تحريات رياضية مسهب فيها فى ظروف كهذه تجعل مصير كل معادلة ، الدفن تحت أكداس القيود • غير اننا ، اذا اولنا رموزنا بفكرة العمليات، فان جميع القيود تتلاشى ، كأنها ذهبت بفعل ساحر • فالمعادلة : س + ١ = ٣ تكون نتيجتها س = + ٢ ، والمعادلة س + ٣ = ١ تنتج س = - ٢ ، والمعادلة س + أ = ب تعطى س = ب - أ ، وهى عملية جمع او طرح ، حسب مقتضى الحال • وليست بنا حاجة الى ان نقرر ما اذا كانت ب - أ تمثل عملية جمع او طرح ، لان قواعد التصرف بالرموز واحدة فى الحالتين ، وليس من خطة هذا الكتاب تدوين باب مفصل من الجبر الاولى • على ان غرضنا يقتصر على توضيح الفكر الاساسية التى وجهت نشوء هذا العلم • ولن نتطرق الى شرح القواعد

المفصلة لضرب الاعداد الموجبة والسالبة ، ولا ادماجهـا بشكل آخر •
ولكننا شرحنا فيما سبق ان الاعـداد الموجبة والسالبـة هى عمليـات ، وكذلك اطلق عليهـا اسم « خطوات » • وعليه تكون +٣ هى الخطوة التى نخطوها من ٢ الى ٥ ، و ـ ٣ هى الخطوة الى الوراء من ٥ الى ٢ •
خذ الخط مسَ الذى قسمناه بالطريقة التى شرحناها فى اوائل الفصل ، بحيث تمثل نقاطه اعدادا ، فنجد ان + ٢ هى :



الخطوة من م الى ب او من أ الى حـ او (اذا اخـذنا الاقسام الواقعة فى الجهة الثانية من م) من حَ الى أَ او من دَ الى بَ وهكذا •
وبالمثل يقال ان ـ ٢ هى الخطوة من م الى بَ او من بَ الى دَ او من ب الى م او من حـ الى أ •

لنا ان نعـد النقطـة التى نصل اليهـا بخطوة من م ، ممثلـة لتلك الخطوة • وعليه فان أ تمثل + ١ و ب تمثل + ٢ و أَ تمثل ـ ١ و بَ تمثل ـ ٢ وهكذا • ومما يستدعى الملاحظة انه ، عند الاقتصار على الاعداد الحقيقية الاغفال[١] كانت النقاط التى على جهة واحدة فقط من م أى التى بالاتجاه مس تمثل الاعـداد ، اما الآن ، وبواسطـة الخطوات ، فاصبحت كل نقطة ، على الخط بأسره وفى جهتى م ، تمثل خطوة • ان هذا تمثيل صورى للعمومية المتفوقة التى استدعتها الاعداد

(١) الاعداد الاغفال هى التى لا علامة + أو ـ أمامها والاعداد المعلمة التى تسبقها احدى هاتين الاشارتين •

الموجبة والسالبة • ونعنى بها العمليات او الخطوات • ان الاعداد المعلّمة هى أيضا حالات خاصة مما يدعى بالمتجهات Vectors (وهى كلمة مقتبسة من اللغة اللاتينية اصلها Veho ومعناها انا اجرّ او احمل) ، اذ فى الوسع ان نتصور ذرّة تحمل من م الى أ او من أ الى ب •

ان اشارتنا ، قبل بضع صفحات ، الى اعتراض الرجل العملى على التعقيدات التى يثيرها ادخال الاعداد الموجبة والسالبة ، لم يكن غير قذف بحق ذلك الرجل البارع • لاننا فى الحقيقة على أهبة النظر الى أحد ميادين انتصاراته العظيمة • فان كان لابد من الاعتراف بالحق ، فان الرجل العملى ، كان أول من استعمل علامتى + و − • ومع أن أصلهما ليس بالبين تماما ، فمن الراجح أنهما أخذتا عن الاشارات التى كانت تكتب بالطباشير على صناديق البضائع فى المستودعات التجارية فى المانيا ، للدلالة على زيادتها على الوزن القياسى أو نقصها عنه • وأقدم بيان جاء عنهما تجده فى كتاب المانى طبع فى ليبزك عام ١٤٨٩ ب • م • ويظن أن اول من استعملها فى الرياضيات ، هو رياضى المانى يدعى ستايفل Stifel فى كتاب طبعه فى نورنبورگ عام ١٥٤٤ • ولكن ماقولك فى أن الالمان لم ينظر اليهم بجد ، كأمة عملية ، الا حديثا ؟ ان احد الامثال القديمة ، خصص سلطة البحر بالانكليز ، والبر بالفرنسيين، والجو بالالمانن الذين يجب أن يكونوا قد اتوا بالعلامتين + و − من السحاب • ان الآراء النافعة للبشرية ، التى حققتها هذه الرموز ،لاكبر

جدا من أن تأتى من البحر او البر •

ان امكانيات استعمال الاعداد الموجبة والسالبة واضحة للعيان • فاذا مثلنا الاطوال الموجهة وجهة ، بأعداد موجبة ، فاننا نمثل الاطـوال الموجهة للوجهة المعاكسة ، بأعداد سالبة • واذا كانت السرعة باتجاه ما موجبة ، فانها تكون سالبة بالاتجاه المضاد • واذا كان الدوران حول قرص مدرج ما ، Dial ، بصورة مضادة لحركة عقربى الساعة ، (أى بصورة عكساعية)[١] موجبا فالدوران للجهة المضادة لذلك (أى الجهة الساعية)[٢]، يكون سالبا • واذا كان الرصيد فى المصرف موجبا ، فسحب مايزيد عليه يكون سالبا • والتكهرب الزجاجى[٣] اذا كان موجبا ، كان التكهرب الشمعى[٤]، سالبا • وفوق ذلك نجد فى حالة المثال الاخير ، أن اصطلاحى التكهرب الموجب والتكهرب السالب ، اصبحا الاسمين الغالبين ، وأزاحا الاصطلاحين الاخرين من الميدان • وفى الوسع تقديم قائمة كبيرة من هذه الامثلة • والواقع ، ان فكـرة الاعداد الموجبة والسالبة كانت أشهر القضايا الرياضية الدقيقة توفيقا •

---

(١) ترجمنا كلا من كلمتى Anticlock ؛ Counter clock wise wise بكلمة « عكساعى » لان القصد منها وصف حركة الدوران عندما تكون فى وجهة معاكسة لوجهة حركة عقربى الساعة •

(٢) كما ترجمنا Clockwise بكلمة ساعى فالحركة الساعية يقصد بها الدوران بوجهة حركة عقربى الساعة •

(٣) Vitreos electrification وهو التكهـرب الناشـى، من دلك الزجاج بالحرير •

(٤) Resinous electrification وهو التكهرب الناشى، من دلك قطعة من شمع الختم أو المطاط المجفف أو الكهرمان بقماش من الصوف •

الفصل السابع

الاعداد التخيلية

IMAGINARY NUMBERS

ان كانت الآراء الرياضية التى عالجناها فى الفصل السابق ، من النوع الذى أحرز قبولا عاما ، فان الآراء التى فى هذا الفصل ، قد أثارت مايضارع ذلك من الاهتمام العام • ولكن نجاحها ، كان من جنس آخر ، من النوع الذى يطلق عليه الفرنسيون اسم Succé de scandal رواج الفضيحة • فلم يكن الرجل الواقعى وحده ، هو الذى أعرب عن حيرته ، فى انصراف الرياضيين الى العناية بأشياء غامضة ، يشهد عليها اسمها نفسه بأنها تخيلية ، بل شاركه فى ذلك حملة الاقلام والفلاسفة • ومن المفيد أن نشير فى هذه المرحلة الى وجود طراز خاص من الذهن ، همه اقلاق نفسه والآخرين بالجدل حول انطباق المصطلحات العلمية على مسمياتها • فمن الاسئلة العقيمة التى سئلت ، هل من المناسب ان يقال ان الاعداد اللاقياسية Incommensurable numbers هى أعداد ؟ وهل الاعداد الموجبة والسالبة هى اعداد حقا ؟ وهل الاعداد التخيلية هى تخيلية ؟ وهل هى أعداد ؟ ومن العسير أن يفهم بجلاء ، ان المصطلحات العلمية ، ان هى الا اسماء تطلق

بصورة كيفية ، كأسماء العلم للاطفال ، ولذلك فلا يمكن مناقشة كونها صحيحة أم مغلوطا فيها ولكن يجوز أن تصدر عن حكمة ، أو دون تروية • فيكون أحيانا فى الوسع ترتيبها بحيث تكون سهلة الحفظ ، أو ان توحى بآراء مهمة متناسقة • والقاعدة الاساسية فى هذا الامر أعرب عنها (همپتى دمپتى فى حديثه مع أليس فى بلاد العجائب عندما قال لها « اننى أدفع لها ثمنا غاليا ، وأجعلها تعنى ما أريد ») • ولذلك فلن نعبأ ما اذا كانت الاعداد التخيلية تخيلية ، وانها أعداد ، ولكننا سنقبل هذا التعبير باعتداده اسما كيفيا لفكرة رياضية معينة ، سنحاول توضيحها الآن •

أن أصل الفكرة ، يشابه ، من جميع الوجوه ، أصلها للاعداد الموجبة والسالبة • وقد انبثقت بالاسلوب عينه ، عن الفكر الرياضية الكبيرة الثلاث ، المتغير والصيغة الجبرية ، والتعميم • فكما نشأت الاعداد الموجبة والسالبة ، عن النظر فى معادلات مثل س + ١ = ٣ ، س + ٣ = ١ أو فى المعادلة العامة س + أ = ب ، كذلك صدر اصل الاعداد التخيلية ، عن معادلات مثل س^{٢} + ١ = ٣ ، س^{٢} + ٣ = ١ و س^{٢} + أ = ب ، ومر بالمراحل أنفسها • فالمعادلة س^{٢} + ١ = ٣ ، تصبح س^{٢} = ٢ ، ولها حلان • فاما أن تكون س = + √٢ واما أن تكون س = - √٢ • وجرت العادة أن يكتب النص على وجود هذين الحلين المتقابلين ، بالشكل

$س = \mp \sqrt{٢}$ • انا نسير حتى الان فى طريق واضحة المعالم ، كما

فى القضية السابقة ، ولكن توجد معضلة تناظر معضلة تلك القضية •

فالمعادلة $س^٢ + ٣ = ١$ ، تنتج $س^٢ = -٢$ • ولا يوجد عدد موجب

أو سالب ، اذا ضرب بنفسه كانت نتيجته مربعا سالبا • وعلى ذلك ،

اذا اقتصرنا معنى رموزنا على الاعداد الموجبة والسالبة المألوفة وحدها ،

فلن نجد حلا للمعادلة $س^٢ = -٢$ وتكون المعادلة لغوا • وأخيرا اذا

أخذنا الصيغة النهائية $س^٢ + أ = ب$ فلا يمكن وجدان الحلين

$س = \pm \sqrt{ب - أ}$ الا فى حالة واحدة ، وهى التى لاتكون فيها ب أقل

من أ ، وليس فى حالة سواها • لذلك ليس فى وسعنا أن نقول ، من

دون قيد ، بجواز جعل العددين الثابتين أ ، ب ، أى عددين كانا اطلاقا ،

أى ان العددين « الثابتين » أ ، و ب ليسا « متغيرين » مستقلين غير مقيدين

كما يجب أن يكونا • وينشأ عن ذلك ، جملة من التحديدات والقيود ،

التى تتراكم حول عملنا ، كلما تقدمنا •

وتنتظرنا الآن المهمة نفسها ، كما فى السابق ، وهى وجدان تفسير

جديد لرموزنا ، بحيث تضمن على الدوام معنى للحلين $س = \pm$

$\sqrt{ب - أ}$ الناتجين من المعادلة $س^٢ + أ = ب$ • أو بتعبير آخر ،

تتطلب تفسيرا للرموز يجعل الرمز $\sqrt{أ}$ دوما ، ذا معنى ، سواء أكانت

أ موجبة أم سالبة • ومن البديهى أن يكون ذلك التفسير ، مما يصح معه

أن يجرى على الرمز $\sqrt{أ}$ ، مفعول جميع القوانين الاصولية المعتادة ،

للجمع والطرح والضرب والقسمة . كذلك يجب أن لا يتعارض هو والعمومية التى توصلنا اليها باستعمال الاعداد الموجبة والسالبة ، بل يجب فى الواقع ، من أحد الوجوه ، أن يتضمنها كحالات خاصة . وعندما تكون أ سالبة ، يجوز أن نكتب بدلها $-ج^{٢}$ ، مع العلم أن $ج^{٢}$ موجبة . فيكون اذ ذاك : $\sqrt{-ج^{٢}} = \sqrt{(-١)ج^{٢}} = \sqrt{(-١)}\sqrt{ج^{٢}} = ج\sqrt{(-١)}$. وعليه اذا استطعنا أن نفسر رموزنا بحيث يكون لـ $\sqrt{-١}$ ، معنى معلوم ، نكون قد وصلنا الى هدفنا . ولذلك أصبح ينظر الى $\sqrt{(-١)}$ بانها الرأس والمقدم للكميات التخيلية جمعاء .

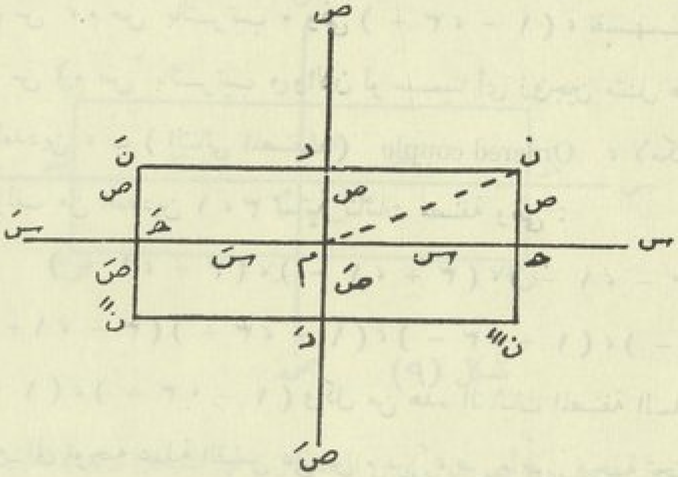
ان أمر وجدان تفسير لـ $\sqrt{(-١)}$ ، عمل أشق جدا من نظيره تفسير $-$ أ . والحقيقة مع أن أسهل المعضلتين ، حلت بالسليقة تقريبا من فوز ظهورها ، فان كون الثانية معضلة ربما فى الامكان حلها ، لم يدر فى خلد أعاظم الرياضيين فى اول الامر . فالمعادلات من النوع $س^{٢} = -٣$ ، كانت تعد لغوا ، ويضرب صفحا عنها .

وعلى كل ، أخذوا يدركون بالتدريج ، خلال القرن الثامن عشر ، بل قبله ، كيف يسر ، تعين معنى لهذه الرموز السخيفة ، الامور جدا . ولذلك روجعت المناقشات الشكلية عن هذه الرموز ، وكانت مبنية على مجرد فرض أن الرموز هذه ، تخضع لقوانين المعادلات الجبرية المعتادة . ووجد أنه بمجرد تسويغ استعمال هذه الرموز ، ببرهان

مقبول ، يمكن الوصول الى عالم كامل من النتائج الممتعة • فالكثير من الرياضيين اذ ذاك ، لم يكونوا على بينة من صحة منطقهم فى التعامل بها • وقد أدى ذلك الى أن قيل بأن رموزا لا معنى لها ، يمكن ان عولجت بمهارة أن تنتج ، بطريقة مبهمة ، براهين صحيحة لنظريات علمية • والحال أن لا شيء • أشد خطأ من ذلك • لان الرمز الذى لم يعرّف ، كما يجب ، لايكون رمزا مطلقا • بل هو لطخة حبر على ورق ، ولكنه ذو شكل يعرف بسهولة • واللطخات المتتالية على الورق ، لايمكن ان تثبت شيئا ، الا وجود قلم رديء ، او كاتب قليل الانتباه • وفى هذا الدور ، نعتت $\sqrt{(-1)}$ بالتخيلية • وكل ما استطاع أولئك الرياضيون اثباته ، كان سلسلة من نظريات مفروضة • واليك صيغة واحدة منها : ان وجد تفسير لـ $\sqrt{(-1)}$ ، ولجمع وطرح وضرب وقسمة $\sqrt{(-1)}$ يمكن معه تطبيق القواعد الجبرية العامة (مثل س + ص = ص + س ••• الخ) ، ترتب على ذلك النتائج كذا و كذا • ومن البديهى ، أن لايستسيغ الرياضيون ، (ان الشرطية) التى يجب أن تسبق بيان النتائج التى توصلوا اليها •

وعندما وجد التفسير كان ، كما هو المتوقع ، أشد تعقيدا من تفسير الاعداد السالبة • ونلفت انتباه القارىء ، الى الايضاحات التمهيدية الدقيقة التى سنقدمها • لقد سبق أن اطلعنا على كيفية تمثيل نقطة بعددين • واذا استعنا بالاعداد الموجبة والسالبة ، نتمكن من تعيين

موقع نقطة أية كانت على المستوى بزوجين من هذه الاعداد • وللتوصل الى ذلك نتخذ الخطين المستقيمين المتعامدين س م سَ ، ص م ص محورين ، لتقع عليهما جميع قياساتنا • فنعد الاطوال المقيسة على



شكل (٨)

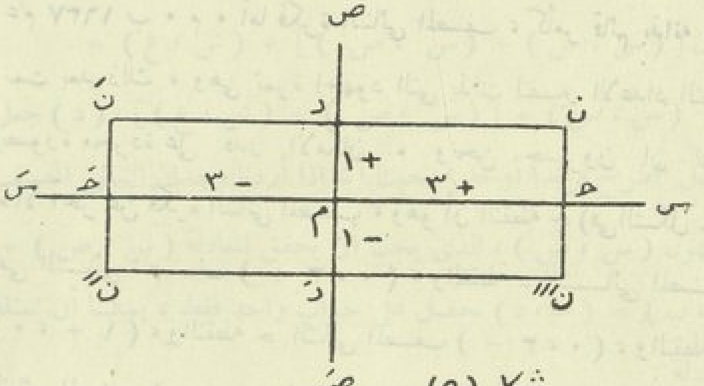
م س ، م ص موجبة ، والمقاسة على الجهة العكسية م سَ ، م صَ سالبة • ولنفرض الآن أننا كتبنا زوجين من الاعداد وفق ترتيب مثل (+ ٣ ، + ١) ، بحيث أن العدد الاول (وهو فى هذا المثال + ٣) ، يمثل البعد عن م على المستقيم س م سَ ، والعدد الثانى (وهو فى هذا المثال + ١) ، يمثل البعد عن م على المستقيم ص م صَ • فيكون ما نقصده من (+ ٣ ، + ١) ، « راجع الشكل ٩ » ، هو أن نقيس طولا قدره (٣) وحدات على س م سَ وفى الجهة الموجبة ، أى ابتداء من م الى جهة س ، وطولا آخر قدره + ١ على ص م صَ وفى الجهة الموجبة ،

أى ابتداء من م الى جهة ص • وفى (- ٣ ، + ١) نقيس طولا قدره ٣ وحدات من م الى جهة سَ ، وآخر قدره وحدة واحدة من م الى جهة ص • كذلك الحال فى (- ٣ ، - ١) ، فاننا نقيس الطولين على م سَ ، م صَ بالترتيب • وفى (+ ٣ ، - ١) ، نقيسهما على م س ، م صَ بالترتيب • والان لو سمينا أى زوجين مثل هذين العددين ، ب (الثنائى المصنف) Ordered couple ، لامكننا أن نؤلف من العددين ١ ، ٣ ثمانية ثنائيات مصنفة وهى :

(+ ١ ، + ٣) ، (- ١ ، + ٣) ، (- ١ ، - ٣) ، (+١ ، - ٣) (+ ٣ ، + ١) ، (- ٣ ، + ١) ، (- ٣ ، - ١) ، (+ ٣ ، - ١) وكل من هذه الثنائيات المصنفة الثمانية ، يشير الى توجيه عملية القياس على س م سَ ، ص م صَ وجهة تختلف عن وجهات الباقين جميعا •

ولقد بينا تصويريا (فى الشكل ـ ٩) ، عمليات القياس التى تمثلها الثنائيات المصنفة الاربعة الاخيرة المذكورة أعلاه • فان الطولين م جـ ، م د معا ، يقابلان (+ ٣ ، + ١) ، والطولين م جـ ، م د معا ، يقابلان (- ٣ ، + ١) ، كما أن م جَ ، م دَ معا ، يقابلان (- ٣ ، - ١) ، و م جـ ، م دَ معا يقابلان (+ ٣ ، - ١) • ومن السهل أن نرى ، عند اكمالنا المستطيلات المختلفة ، ان موقع النقطة ن يتعين بالضبط بالثنائى المصنف (+ ٣ ، + ١) • كما أن موقع النقطة ن يعين بالضبط مقدار العددين فى الثنائى المصنف (+ ٣ ، + ١) •

ومثل ذلك يقال عن ن̄ و (– ٣ ، + ١) وعن ن̿ و (– ٣ ، – ١) و ن‴ و (+ ٣ ، – ١) .



شكل (٩)

وبصورة أعم نقول ، ان النقطة ن (فى الشكل – ٨) تقابل الثنائى المصنف (س ، ص) على فرض أن كلا من س ، ص عدد موجب ، والنقطة ن̄ تقابل (س̄ ، ص) على فرض أن س̄ سالب ، ون̿ تقابل (س̄ ، ص̄) ون‴ تقابل (س ، ص̄) . وعلى ذلك فان ثنائيا مصنفا مثل (س ، ص) والنقطة المناظرة له ن ، يعين أحدهما الآخر بالتبادل ، مع جواز جعل مقدار كل من س ، ص أيا كان من الاعداد الموجبة أو السالبة . وقد يكون من الملائم أن نقدم فى هذه المرحلة بعض الاسماء ، ففى الثنائى المصنف (س ، ص) يدعى العدد الاول س بـ « الاحداثى السينى » والعدد الثانى ص بـ « الاحداثى الصادى » ويسمى العددان معا بـ « احداثيى النقطة » . وعندما كانت نظرية الاعداد التخيلية فى

دور التكوين ، لم تكن فكرة تعيين موقع نقطة بواسطة احداثيها بالامر الجديد . اذ ان هذه الفكرة تعزى الى الرياضي والفيلسوف الافرنسي ديكارت . وتظهر في كتابه (Discours البحث) ، المطبوع في ليدن عام ١٦٣٧ ب . م . أما فكرة الثنائي المصنف ، كأمر قائم بذاته ، فقد نمت بعد ذلك . وهي ثمرة الجهود التي بذلت لتفسير الاعداد التخيلية بصورة مجردة على قدر الامكان . ونحن جديرون ان نلحظ مثالا آخر عن فكرة الثنائي المصنف ، وهو أن النقطة جـ (في الشكل ـ ٩) هي الثنائي المصنف (+ ٣ ، ٠) ، والنقطة د الثنائي المصنف (٠ ، + ١) ، والنقطة جـَ الثنائي المصنف (- ٣ ، ٠) ، والنقطة دَ الثنائي المصنف (٠ ، - ١) ، والنقطة م الثنائي المصنف (٠ ، ٠) .

وتوجد وجهة نظر اخرى فيما يمثله الثنائي المصنف (س ، ص) ، وهي أن يمثل الخط المنقط م ن (شكل ـ ٨) لا النقطة ن . أي أن الثنائي المصنف ، يمثل مستقيما مرسوما من نقطة الاصل م بطول معلوم ووجهة معينة . ويصح أن نسمي م ن بالخط المتجه من م الى ن ، أو بالخطوة من م الى ن . ونرى من ذلك اننا ، في هذا الفصل ، اكتفينا بأن نوسع المعنى السابق الذي أعطيناه للاعداد الموجبة والسالبة . ان طريقة التمثيل هذه بالمتجهات ، تفيدنا جدا عندما نريد أن نحدد معنى لجمع وضرب الثنائيات المصنفة .

لنتقدم الآن ونسأل ، ما المعنى الذي نجد من الموافق تحديده لجمع الثنائيين المصنفين (س ، ص) و (سَ ، صَ) ؟ ان تفسير الجمع

يجب أن يضمن (أ) جعل حاصل الجمع ثنائيا مصنفا آخر ، (ب) جعل العملية قابلة الابدال ، بحيث يكون (س ، ص) + (سَ ، صَ) = (سَ ، صَ) + (س ، ص) ، (ح) جعل العملية قابلة الربط ، بحيث يكون [(س ، ص) + (سً ، صً)] + (ش ، ع) =

(س ، ص) + [(سً ، صً) + (ش ، ع)] ، (د) جعل حاصل الطرح فريداً أوحد ، بحيث أننا اذا أردنا وجدان الثنائى المصنف المجهول (س ، ص) ، الذى يجب أن يحقق المعادلة (س ، ص) + (أ ، ب) = (ح ، د) نحصل على جواب واحد فقط ، يمكننا أن نمثله بالمعادلة :

(س ، ص) = (ح ، د) − (أ ، ب)

ان هذه الشروط جميعا تحقق ؛ اذا ثبّتنا أن (س ، ص) + (سً ، صً) ، تعنى الثنائى المصنف (س + سً ، ص + صً) • وعلى ذلك نعرّف (س ، ص) + (سً ، صً) بأنها = (س + سَ ، ص + صَ) • وليلاحظ هنا ، أننا جارينا العادة الرياضية التى تجوّز استعمال الرمز + بمعان مختلفة • فأن الـ + التى على الجهة اليمنى من المعادلة ، تحمل المعنى الجديد الذى عرفناه الآن ، بينما نجد أن اشارتى الـ + اللتين على الجهة اليسرى منها ، يحملان المعنى الذى عرفناه فى الفصل السابق ، وهو جمع الاعداد الموجبة والسالبة ، أى (العمليات) • ومع ذلك ، فلا ينشأ التباس عملى عن هذا الاستعمال

المزدوج . واليك بعض الامثلة عن الجمع :

(+ ٣ ، + ١) + (+ ٢ ، + ٦) = (+ ٥ ، + ٧)

(+ ٣ ، − ١) + (− ٢ ، − ٦) = (+ ١ ، − ٧)

(+ ٣ ، + ١) + (− ٣ ، − ١) = (٠ ، ٠)

وبهذا نكون قد حسمنا أمر الطرح ايضا فنجد أن (س ، ص) − (ش ، ع) = (س − ش ، ص − ع) . وعليه فأن :

(+ ٣ ، + ٢) − (+ ١ ، + ١) = (+ ٢ ، + ١)

و (+ ١ ، − ٢) − (+ ٢ ، − ٤) = (− ١ ، + ٢)

و (− ١ ، − ٢) − (+ ٢ ، + ٣) = (− ٣ ، − ٥)

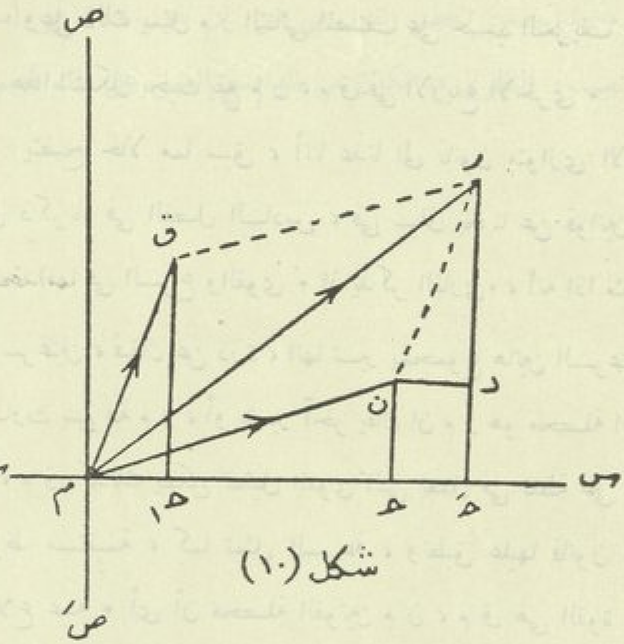
ومن السهل ان نرى ان :

(س ، ص) − (ش ، ع) = (س ، ص) + (− ش ، − ع)

وان (س ، ص) − (س ، ص) = (٠ ، ٠) .

ولذلك ينظر الى (٠ ، ٠) بأنها (الثنائي المصنف الصفر) . مثال ذلك ، ان (س ، ص) + (٠ ، ٠) = (س ، ص) .

والتمثيل التصويري ، لجمع الثنائيات المصنفة ، امر قد يأخذنا العجب من سهولته .



شكل (١٠)

لنجعل م‌ن يمثل (س ، ص) ، أى ان م‌حـ = س ، ن‌حـ = ص ، ولنفرض ان م‌ق يمثل (س$_1$ ، ص$_1$) أى م‌حـ$_1$ = س$_1$ ، ق‌حـ$_1$ = ص$_1$ ، ثم لنكمل متوازى الاضلاع م‌ن‌ر‌ق بالخطين المنقطين ن‌ر ، ق‌ر ، فيكون القطر م‌ر ، هو الثنائى المصنف (س + س$_1$ ، ص + ص$_1$) .

لاننا لو رسمنا ن‌د موازيا الى م‌س لوجدنا ان المثلثين م‌ق‌حـ$_1$ ، ن‌ر‌د متساويان من جميع الوجوه . واذن يكون حـ‌حـَ = ن‌د = س$_1$ ، ر‌د = ق‌حـ$_1$ = ص$_1$ وعليه ينتج أن :

م‌حـَ = م‌حـ + حـ‌حـَ = س + س$_1$

ر‌حـَ = د‌حـَ + ر‌د = ص + ص$_1$

وعلى ذلك يمثل م ر الثنائى المصنف على حسب التعريف • ويمكن رسم هذا الشكل بحيث يقع م ن ، م ق فى الارباع الاخرى •

يتضح حالا مما سبق ، أننا عدنا الى قانون متوازى الاضلاع ، الذى ذكرناه فى الفصل السادس ، فى سياق بحثنا عن قوانين الحركة واستخدامها فى السرع والقوى • اذ يذكر القارىء ، أنه اذا مثل م ن ، م ق سرعتين ، فيقال عن ذرة ، انها تسير بمجموع هاتين السرعتين معا ، اذا سارت بسرعة م ر ، أو بتعبير آخر يقال ان م ر هو محصلة السرعتين م ن ، م ق كذلك يمكن تمثيل القوى التى تعمل فى نقطة على جسم ما بخطوط مستقيمة ، كما تمثل السرعة ، ونطبق عليها قانون متوازى الاضلاع عينه • أى أن محصلة القوتين م ن ، م ق هى القوة الممثلة بالقطر م ر • وينتج عن ذلك امكان النظر الى الثنائى المصنف بأنه يمثل سرعة أو قوة • وتكون القاعدة التى بسطناها الآن ، عن جمع الثنائيات المصنفة ، شاملة للقوانين الاساسية فى علم الآلة (الميكانيك) عن جمع القوى والسرع • ان من أبهر صفات الرياضيات ، ذلك الشكل العجيب الذى تتشابك به الافكار والنتائج لمختلف أجزاء الموضوع • ومع أن الاعتبارات الرياضية البحتة ، بأصفى انواعها ، كانت دليلنا فى أبحاث هذا الفصل والفصل السابق ، فانها رجعت بنا الى أعظم القوانين الطبيعية أهمية تلك القوانين التى يستعين بها كل مهندس ، عندما يضع تصميم محرك Engine ، وكل بناء سفن ، عندما يحسب مدى استقرار سفينة

وتوازنها • وليس من تناقض القول فى شىء أن نقول ، أننا فى أسمى حالات التصــور النظرى قد نكون من الواقــع العملى على قاب قوســين أو أدنى •

الفصل الثامن

الأعداد التخيلية "تتمة"

ان تعريف ضرب المصنفات الثنائية يخضع لنفس الاعتبارات التى روعيت فى جمعها . وتفسير الضرب يجب أن يضمن :

(أ) أن حاصل الضرب مصنف ثنائى آخر .

(ب) أن العملية قابلة الابدال بحيث يكون :

(س ، ص) × (سَ ، صَ) = (سَ ، صَ) × (س ، ص)

(حـ) أن العملية قابلة الربط بحيث يكون :

{(س ، ص) × (سَ ، صَ)} × (ش ، ع)

= (س ، ص) {(سَ ، صَ) × (ش ، ع)}

(د) أن خارج القسمة فريد أوحد {باستثناء حالة الثنائى المصنف الصفر (٠ ، ٠)} بحيث أننا اذا اردنا وجدان الثنائى المصنف المجهول (س ، ص) الذى يجب أن يحقق المعادلة :

(س ، ص) × (أ ، ب) = (حـ ، د)

نحصل على جواب واحد فقط يمكننا أن نمثله بـ :

(س ، ص) = (ح ، د) ÷ (أ ، ب) أو (س ، ص) =

$$\frac{(\text{ح ، د})}{(\text{أ ، ب})}$$

(هـ) وعلاوة على ذلك ، يجب أن يصح تطبيق القانون الذى يربط الجمع والضرب وهو قانون التوزيع أى أن يكون :

(س ، ص) × { (أ ، ب) + (ح ، د) }

= { (س ، ص) × (أ ، ب) } + { (س ، ص) × (ح ، د) }

ويمكن ضمان جميع هذه الشروط (أ) ، (ب) ، (ح) ، (د) ، (هـ) ، بتعريف ، وان يبدو معقدا عند اول نظرة ، فهو هين التوضيح هندسيا وهذا التعريف هو :

(س ، ص) × (سَ ، صَ) = { (س سَ − ص صَ) ، (س صَ + سَ ص) } ..... « أ »

ومنه نعرف معنى الرمز × عندما نكتبه بين ثنائيين مصنفين . من السهل أن نرى ، أن هذا التعريف يجعل حاصل الضرب ثنائيا مصنفا اخر ، وان الطرف الايسر من المعادلة (أ) ، لا يتأثر اذا عوضنا ، فى آن واحد ، عن (س) بـ (سَ) ، وعن (ص) بـ (صَ) . وبذلك يتحقق الشرطان (أ) و (ب) . اما برهان تحقق الشروط (هـ) ، (ح) ، (د) فيدانى ذلك يسرا ، كما سنرى عندما نقدم التفسير الهندسى بعد قليل . ومن الممتع أن نقف ، قبل الاقدام

على ذلك ، لنرى ان كنا قد وصلنا الى الهدف الذى من اجله بذلنا كل هذا الجهد .

كنا قد تطرقنا الى معادلات من الصيغة س^{٢} = - ٣ التى لم نجد لها حلا بدلالة الاعداد الحقيقية الموجبة والسالبة . ثم وجدنا أن جميع مشاكلنا تذوب فيما اذا وفقنا الى تفسير المعادلـة س^{٢} = - ١ . أى اذا استطعنا أن نعرّف $\sqrt{-١}$ بحيث يكون $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$

والآن دعنا نعم النظر فى الثنائيات الثلاثة الخاصة (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١) . لقد سبق وبرهنا أن (س ، ص) + (٠ ، ٠) = (س ، ص) .

زيادة على ذلك لدينا الآن :

(س ، ص) × (٠ ، ٠) = (٠ ، ٠)

يتضح من هذين أن الثنائى المصنف (٠ ، ٠) يقوم فى حالتى الجمع والضرب ، بالدور نفسه الذى يقوم به الصفر ، فى أوليات الحساب والجبر ، وما عليك ، لتتأكد ذلك ، الا أن تقارن المعادلتين أعلاه بالمعادلتين س + ٠ = س ، س × ٠ = ٠

لننظر الآن فى (١ ، ٠) فنجد أنها تمثل دور ١ (الواحد) فى مبادىء الحساب والجبر حيث نجد فى أوليات هذين العلمين أن الميزة الخاصة بالـ ١ هى س × ١ = س لكافة قيم س . وعلى حسب قانون الضرب نجد أن :

(س ، ص) × (۱ ، ۰) = {(س ، – ۰) ، (ص + ۰)}
= (س ، ص) أى أن (۱ ، ۰) هى وحدة ثنائية .

واخيرا لنأخذ (۰ ، ۱) : ان هـذه ستفسـر لنا الرمز √(–۱) اى أنها يجب أن تمتلك خاصية √(–۱) × √(–۱) = –۱ ويظهر ذلك من تطبيق قانون الثنائيات المصنفة ، حيث أن : (۰ ، ۱) (۰ ، ۱) =
{(۰ – ۱) ، (۰ + ۰)} = (– ۱ ، ۰)

ولكن (۱ ، ۰) هى الوحدة الثنائية و (– ۱ ، ۰) هى الوحدة الثنائية السالبة وعلى ذلك فان (۰ ، ۱) تمتلك الخاصية المطلوبة[۱]. على أنه يوجد جذران لـ – ۱ ، يجب أن يحسب حسابهما ، وهما ± √(–۱) . وللتوصل الى ذلك ننظر فى (۰ ، ۱) . فاذا تذكرنا أن $(-1)^2 = 1$ نجد ان (۰ ، – ۱) × (۰ ، – ۱) =
(– ۱ ، ۰) [يرجى مراجعة الحاشية (۲) فى أسفل الصحيفة] .

وينتج عن ذلك أن (۰ ، – ۱) هى الجذر التربيعى الثانى لـ √(– ۱) ، أى أن الثنائيين المصنفين (۰ ، ۱) ، (۰ ، – ۱) هما التفسيران لـ ± √(– ۱) بدلالة الثنائيات المصنفة . ولنسأل الآن

---

(۱) يقصد المؤلف بذلك أن مربع الثنائى المصنف (۰،۱) هو الوحدة الثنائية السالبة (– ۱ ، ۰) أى أنه يمتلك نفس الخاصية المطلوبة فى مربع √–۱

(۲) يقصد المؤلف بذلك ان مربع (۰ ، – ۱) هو مربع (۰ ، ۱) نفسه أى انه (– ۱ ، ۰) وعلى ذلك يكون للوحدة الثنائية السالبة (– ۱ ، ۰) جذران تربيعيان هما (۰ ، ۱) و (۰ ، – ۱) .

أي زوجين يتناظران ؟ أي هل (٠ ، ١) تقابل $+\sqrt{(-1)}$ و

(٠ ، - ١) تقابل $-\sqrt{(-1)}$ أم على العكس (٠ ، - ١) تقابل $+$

$\sqrt{(-1)}$ و (٠ ، ١) تقابل $-\sqrt{(-1)}$؟والجواب هو: لارجحان لاحد

هذين الترتيبين الرمزيين على الآخر ويجوز الاصطلاح على كل منهما .

ان الثنائيات المصنفة يمكن تقسيمها الى ثلاثة انواع (١) النوع « التخيلي المركب » (س ، ص) ، وهو الذي لا تكون فيه كل من س أو ص صفرا . (٢) النوع « الحقيقي » (س ، ٠) . (٣) النوع « التخيلي البحت » (٠ ، ص) . ولننظر الآن في علاقات هذه الانواع بعضها ببعض ولنبدأ أولا بضرب الثنائي « التخيلي المركب » (س ، ص) بالثنائي « الحقيقي » (أ ، ٠) فنجد : (أ ، ٠) × (س ، ص) = (أ س ، أ ص) . أي ان النتيجة هي ضرب كل حد من حدى الثنائي (س ، ص) بالعدد الحقيقي أ الموجب أو السالب .

ثانيا ، نضرب الثنائي « التخيلي المركب » (س ، ص) بالثنائي « التخيلي البحت » (٠ ، ب) فنجد ان .

(٠ ، ب) × (س ، ص) = (- ب ص ، ب س) .

والنتيجة هنا أكثر تعقيدا ، ويحسن أن نفهمها عن طريق التفسير الهندسي ، الذي سنقدم عليه بعد ملاحظة ثلاث حالات خاصة أخرى .

ثالثا ، نضرب الثنائي « الحقيقي » (أ ، ٠) بالثنائي « التخيلي » (٠ ، ب) فنحصل على (أ ، ٠) × (٠ ، ب) = (٠ ، أ ب) .

رابعا ، نضرب الثنائيين « الحقيقين » (أ ، ٠) ، (أَ ، ٠) بعضهما فنحصل على :

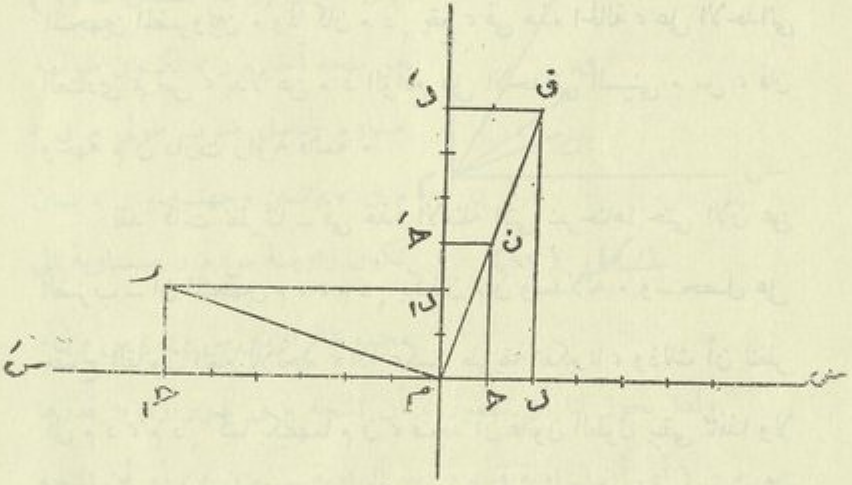
(أ ، ٠) × (أَ ، ٠) = (أأَ ، ٠) .

خامسا ، نضرب « الثنائيين التخيليين » (٠ ، ب) و (٠ ، بَ) فنحصل على :

(٠ ، ب) × (٠ ، بَ) = (- ب بَ ، ٠) .

نعود الآن الى التفسير الهندسى ، وسنبدأ بعدد من القضايا الخاصة . لنأخذ الثنائيين (١ ، ٣) و (٢ ، ٠) وننظر فى المعادلة :

(٢ ، ٠) × (١ ، ٣) = (٢ ، ٦)



شكل (١١)

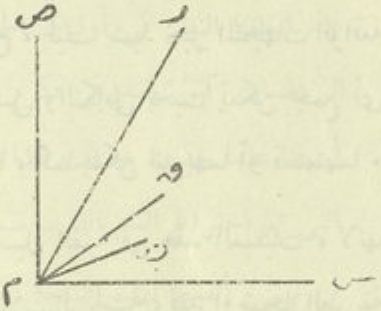
فنجد فى الشكل (١١) ، أن المتجه م ن يمثل (١ ، ٣) ، والمتجه م د يمثل (٢ ، ٠) ، والمتجه م ق يمثل (٢ ، ٦) . وكيما نجد حاصل

ضرب (٢،٠) × (٣،١) هندسيا ، نأخذ طول المتجه م ق مساويا الى حاصل ضرب طولى المتجهين م ن ، م د ، وفى هذه الحالة الخاصة ، نمد م ن الى ق بحيث يساوى طوله الطول المطلوب . وللنظر الآن فى حاصل ضرب (٠،٢) × (٣،١) ، فنجد أن (٠،٢) × (٣،١) = (- ٦ ، ٢) . وتفسير ذلك ، هندسيا ، هو أن المتجه م $د_١$ يقابل (٠،٢) ، والمتجه م ر يقابل (- ٦ ، ٢) . وعليه فان م ر ، الذى يمثل حاصل الضرب ، يكون عمودا على م ق ومساويا لـه بالطـول . ولنلاحظ أن القانون الذى ضبط طول م ق فى القضية السابقة ، هو نفسه الذى ضبط طول م ر ، أى أن طوله هو حاصـل ضرب طولى المتجهين المضروبين . ولما كان م $د_١$ يقع ، فى هذه الحالة ، على الاحداثى الصادى م ص ، بدلا عن م د الواقع على الاحداثى السينى م س ، فان وجهة م ن دارت زاوية قائمة .

لقد كانت نظرتنا ـ فى هذه الامثلة التى شرحناها حتى الان عن الضرب ـ ان المتجهين م د ، م $د_١$ يكيفان م ن ويعدلانه . وسنحصل على مفتاح القانون العام للاتجاه ، اذا عكسنا طريقة تفكيرنا ، وذلك أن ننظر الى م د ، م $د_١$ كما يكيفهما م ن ، فنجد أن قانون الطول يبقى نافذا ولا يتأثر ، أى ان محصلة الطول هى حاصـل ضرب طولى المتجهـين . أما الوجهة الجديدة لمكبر م د ، (أى م ق) ، فنجدها بتدوير م د ، فى وجهة الدوران (العكساعى) أى من م س الى م ص ، زاوية تساوى

الزاوية س م ن . وانه لمن باب الصدفة فى هذه الحالة الخاصة ، أن هذا الدوران جعل م ق يقع على امتداد م ن . دقق الآن حاصل ضرب م د١ ، م ن فتجد أن الوجهة الجديدة لمكبر م د١ (أى م ر) ، تتعين بتدوير م د١ ، باتجاه الدوران العكساعى ، زاوية تساوى الزاوية س م ن . أى ان الزاوية د١ م ر تساوى الزاوية س م ن .

وقد آن لنا أن نعرب عن القاعدة العامة لتمثيل الضرب هندسيا ، على الوجه الآتى :



شكل (١٣)

ان حاصل ضرب المتجهين م ن ، م ق (راجع الشكل ـ ١٢) هو متجه آخر م ر ، يكون طوله مساويا لحاصل ضرب طولى م ن ، م ق ، وتتعين وجهته م ر ، بأن تكون زاوية س م ر مساوية الى مجموع الزاويتين س م ن ، س م ق .

ولذا يجوز لنا أن نتصور ، أن المتجه م ق يدور زاوية قدرها س م ن (أى أن الزاوية ق م ر = الزاوية س م ن) ، أو أن المتجه م ق يجعل المتجه م ن يدور زاوية قدرها س م ق (أى أن الزاوية ن م ر = الزاوية س م ق) .

اننا لم ندعم هذا القانون العام ببرهان ، فأن ذلك يؤدينا الى مداخل

فى الرياضيات ليس من خطة هذا الكتاب التطرق اليها • ولكننا نستطيع أن نرى من فورنا ، أن ذلك يحقق قانون الربط فى الضرب (رقم ح اعلاه) ، لان طول المتجه المحصلة ، ينتج عن عملية الضرب المعتادة بين الاعداد الحقيقية ، وهى مما ينطبق عليها قانون الربط • ثم أن وجهة المتجه المحصلة ، تتعين بمجرد جمع زوايا ، وهذه أيضا مما ينطبق عليها قانون الربط •

ذكرنا ما فيه الكفاية عن الضرب ، كما أننا بينا بصورة خاطفة ، وعن طريق النظر فى الجمع والطرح ، كيف يشيد جبر المتجهات الواقعة فى مستو واحد ، أو حسابها التفاضلى والتكاملى بحيث يمكن جمع أى متجهين فى مستو واحد أو طرحهما ، كما يمكن ضربهما أو قسمتهما •

ومع أننا لم نتطرق الى التفاصيل الفنية فى هذه العمليات ، لانها تطوح بنا الى أغوار عميقة من التفصيلات الرياضية ، فقد أوضحنا الطريقة العامة لكيفية معالجة هذه الامور • وعند تفسير رموزنا الجبرية بهذا الشكل ، يقال اننا نتعامل « بكميات تخيلية » أو « كميات مركبة » • وهذه التسميات ، أمور ثانوية تفصيلية بحتة • ولدينا من الامور الكثيرة ، التى يجب أن نفكر فيها ، مالا يدع مجالا للنظر فيما اذا كان قد أحسن تسمية هذه المصطلحات أم لا •

ان زبدة ما توصلنا اليه من بحثنا هذا ، هو أن جعلنا فى الامكان دوما ، تفسير معادلات من قبيل س + ٣ = ٢ ، أو (س + ٣)^{٢} = − ٢ ،

كائنة ما كانت ووجدان حلول لها بدلالة المتجهات • ويحسن بنا عندما نبحث في مثل هذه التفاسير ، أن نلاحظ أن ٣ تصبح (٣ ، ٠) وأن -٢ تصبح (- ٢ ، ٠) وان س تصبح الثنائي المجهول (ش ، ع) ، وعلى ذلك تأخذ المعادلتان ، الشكلين :

(ش ، ع) + (٣ ، ٠) = (٢ ، ٠) و [(ش ، ع) + (٣ ، ٠)]^{٢} = (- ٢ ، ٠) ، على الترتيب •

لقد توصلنا الان الى حل كامل للصعوبات الاولية التى جابهتنا عند انعامنا النظر فى أوليات الجبر • وبنتيجة هذا الحل ، أصبح علم الرياضيات اكثر تعقيدا فى فكره مما كان عليه عند بدئنا • والحقيقة ، اننا أبدعنا علما جديدا يختلف كليا عن العلم القديم ، ويخدم كافة المقاصد التى تم اختراع العلم القديم بسببها ، بل أكثر منها جدا • ولكن قبل أن نهنىء أنفسنا لهذه النتيجة الطيبة لاتعابنا ، يجب أن نعمل على ازالة الشك الذى لابد أنه الان بدأ يخامر نفس الطالب • ان السؤال الذى ينبغى أن يسأل عنه القارىء نفسه ، هو أين ينتهى هذا الابداع فى التفاسير الجديدة ؟ لاشك اننا توفقنا فى تفسير الجبر بحيث أصبح فى مقدورنا على الدوام ، أن نحل معادلة تربيعية مثل س^{٢} - ٢ س + ٤ = ٠ • ولكن يوجد عدد لاينتهى من المعادلات الاخرى ، مثل س^{٣} - ٢ س + ٤ = ٠ و س^{٤} + س^{٣} + ٢ = ٠ وغيرها مما لاحصر له • فهل علينا أن نبدع علما جديدا كلما ظهرت معادلة جديدة ؟

ان الامر لو كان كذلك ، لكانت جميع تحرياتنا السالفة ، على امتاعها لبعض العقول ، تافهة الاهمية • ولكن الحقيقة العظيمة التى جعلت التحليل الرياضى الحديث من الممكنات ، هى أن حساب التفاضل والتكامل للمتجهات ، مكننا من اعطاء تفسير صائب لكل دستور جديد ، واثبات أن المجهول فى كل معادلة ، يدل على متجه ما • وبقدر مايتعلق الامر بالافكار الاساسية فى الرياضيات ، يصح لنا ان نقول بأن هذا العلم أصبح الان كاملا بذاته • وفى الوقت الذى كانت فيه الجهود تبذل ، لوضعه بصيغته النهائية ، كان قد تم اختراع المحركات البخارية • على ان هذا العلم سيبقى أداة جبارة تعمل على انتصار الفكر على المادة ، على حين تكون النتائج الغريبة الشكل من هذه المحركات قد أودعت المتاحف ، لتوضع الى جانب الخوذ والدروع التى كانت تستعمل فى دور مضى عليه زمن ليس بالبعيد •

الفصل التاسع

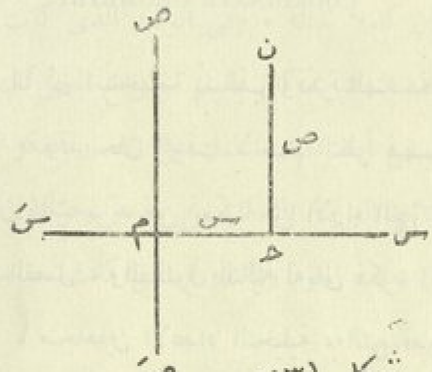
الهندسة الإحداثية

COORDINATE GEOMETRY

لقد سبق لنا أن استخدمنا أساليب وفكر الهندسة الاحداثية فى الفصول السابقة • وقد حان الوقت لانعام النظر فيهـــا على وجـــه التخصيص ، لان ذلك يزيد من تمكننا من الاراء التى توصلنا اليها • وسنعود فى هذا الفصل ، والفصول التالية له الى فكرة الاعداد الحقيقية الموجبة والسالبة ، متجاهلين الاعداد التخيلية ، التى قدمناها للقـارىء فى الفصلين الاخيرين •

كنا نستعمل باستمرار ، الفكرة القائلة باننا اذا رسمنا المحورين س م س َ ، ص م ص َ على مستو ما ، ففى الامكان تعيين موقع نقطة أية كانت مثل ن عليه ، بزوجين من الاعداد الموجبة أو السالبة هما س ، ص بحيث أن س (راجع الشكل ـ ١٣) هو الطول م ح ، وأن ص هو الطول ن ح • وهذه الفكرة على سذاجة مظهرها هى الفكرة الجوهرية فى موضوع الهندسة الاحداثية الواسع • والكشف عنها ، كان مطلع دور خطير الشأن فى تأريخ الفكر الرياضى • وهى تعزى ، كما بينّا

سابقا ، الى الفيلسوف ديكارت ، الذى خطر له كونها طريقة رياضية مهمة عندما كان مستلقيا على فراشه فى صبح أحد الايام • والفلاسفة الذين عرفوا الرياضيات حق المعرفة ، كانوا من بين الذين غذوا هذا العلم باجود الآراء • على أن الواجب يحتم علينا ، من الوجهة الاخرى ، أن نقول ايضا ، ان تعليقات الفلاسفة ، الذين كانت معلوماتهم الرياضية طفيفة أو سطحية أو حديثة عهد ، على الرياضيات ، كانت من غير



شكل (١٣)

استثناء تقريبا ، عديمة القيمة او تافهة او مغلوطا فيها • انها لحقيقة عجيبة ، وسببها أن الاراء الجوهرية فى الرياضيات ساذجة جدا ، بل تكاد تكون صبيانية فى سذاجتها ، وهى لذلك تقع ، بسهولة ضمن نطاق التفكير الفلسفى • ويرجح أن سذاجتها هذه بالذات ، هى علة الخطأ فيها ، لاننا لم نتعود التفكير بأمور سهلة مجردة كهذه • والمرانة الطويلة ضرورية للحصول على مناعة جزئية ضد الخطأ فيها ، وخاصة ، حينما ننحرف عن الطرق العقلية الممهدة •

ان اكتشاف الهندسة الاحداثية ، واكتشاف هندسة المساقط ، اللذين حدثا فى حدود تاريخ واحد ، يصوران حقيقة أخرى كثيرا ما أكد صحتها تاريخ المعرفة • وهى أن قسما من أعظم الاستكشافات تفرع عن أوسع المباحث انتشارا وتداولا • فقد مر حتى مطلع القرن السابع عشر ما ينيف على الالفى عام ، كان خلالها علم الهندسة موضع الدرس ، هذا اذا عددنا ظهوره عاصر اليونان • ان كل مافعله اقليدس ـ المولود سنة ٣٣٠ ق • م ، والذى كان يدرّس فى جامعة الاسكندرية ـ هو قيامه بتنظيم وتوسيع ما أبدعه سلسلة من رجال سلفوه ، بينهم عباقرة أفذاذ • ثم عقبه جيل وراء جيل من الرياضيين ، عملوا على تحسين الموضوع • وزيادة على ذلك لم يقع هذا الموضوع تحت تأثير ذلك الحاجز المميت للتقدم ، ونعنى ، أن دراسته لم تكن مقصورة على مجموعة ضيقة من الناس المتشابهين فى الاصل والمظهر • بل كان الامر على العكس من ذلك تماما ، فقد عالجته حتى القرن السابع عشر عقول المصريين واليونان والعرب والالمان • وبرغم هذا الجهد والعناية التى نالها خلال هذا العدد العديد من الاجيال والعصور ، ومع تنوع العقليات التى درسته ، فأن أهم اسراره كانت تنتظر الكشف عنها •

لايمكن لاحد ان يدرس علم الهندسة ، بل حتى مبادئه الاولية دون أن يتملكه الشعور ، بعدم وجود طريقة عامة تهديه سواء السبيل• ذلك أن البرهنة على كل نظرية ، تتطلب اظهار الجديد من البراعة

والحذق ، أى ان هذا العلم كانت تنقصه حاجة هامة من مستلزمات التفكير العلمى ، وهى الطريقة • والامر الرئيسى فى هندسة الاحداثيات أنها خطت لاول مرة ، طريقة • ان الاستنتاجات ، البعيدة المأخذ ، فى الرياضيات ليست بذات أهمية نظرية كبرى ، لان العلم لايعد بالغا درجة الكمال ، مالم يتألف فى جوهره ، من بسط طرق واضحة متآلفة ، بحيث يمكن الحصول ، بسهولة تامة ، على المعلومات الخاصة بكل مطلب يقع ضمن نطاقه • ولا ينمو العلم بتضخيمه ، بل ينمى بآرائه • فكلما نمت آراؤه ، قلت الاستنتاجات الجديرة بالتدوين • ومن المؤسف فى الرياضيات ، أن كتبها التدريسية مشحونة بنظريات فرعية لاعداد لها ، نظريات لم تبق لها أهمية تذكر ، بل ينبغى دمجها ، كحالات خاصة ، فى الحقائق الاكثر عمومية منها • لان العمومية ، كما سبق وأكدنا بإصرار ، هى روح الرياضيات •

تصور لنا الهندسة الاحداثية ميزة اخرى للرياضيات ، سبقت الاشارة اليها ، وهى ان العلوم الرياضية تتشابك بعضها مع بعض فى اثناء نموها ، وتتشارك الآراء أنفسها • ولن نبالغ اذا قلنا ان الفروع الرياضية المختلفة خاضعة ، أبدأ ، لعملية التعميم بصورة مستمرة • وهى عندما تعمم ، تلتحم وتتحد • وسبب ذلك يعود الى طبيعة هذا العلم نفسها ، وهى عموميته • ونقول بكلمة أخرى ، يعود الى كون أن العلم هذا يتعامل بالحقائق العامة ، التى تنطبق على الاشياء كافة لمجرد وجودها كأشياء • وبهذه المناسبة نقول ، أن أهمية الهندسة الاحداثية ترجع الى

انها تربط علم الهندسة ، الذى بدأ كعلم للفراغ أو للحيـز ، بالجبـر الذى يعود باصله الى علم الاعداد •

لنتذكر الان الفكر الاصلية لهذين العلمين ، لنرى كيف يرتبطان معا بطريقة ديكارت الاحداثية • ولنبدأ بالجبر ، ونترك جانبا الاعداد التخيلية ، ونقصر تفكيرنا على الاعداد الحقيقية فقط ، موجبة كانت أو سالبة • ان الفكرة الاساسية فيه تدور حول العدد ، أيا كان ، ونقصد بذلك العدد المتغير الذى نعبر عنه بحرف لا بأرقام معينة • ونتقدم بعد ذلك للنظر فى الروابط بين المتغيرات • مثال ذلك اذا كان س ، ص متغـيرين ، فيجـوز أن نتصور انهمـا مربوطان بمعادلـة ما ، مثـل س + ص = ١ أو س - ص = ١ ، أو بأى شكل من الاشكال الاخرى التى لا حصر لها • والواقع أننا عندما نفكر برابطة ما ، اذا كانت على شىء من الاهمية ، ينتقل الذهن بنا من الفكرة الاولية عن الاعداد المتغيرة الى الفكرة الثانوية عن الروابط المتغيرة بين الاعداد • وعلى ذلك ، فاننا نعمم الرابطة الخاصة س + ص = ١ ، بوضعها على شكل الرابطة العامة أ س + ب ص = حـ ، التى نجد فيها أن الحروف أ ، ب ، حـ تقوم مقام أعداد ، أيا كانت تلك الاعداد • أى أنها نفسها متغيرات • ولكن هذه المتغيرات تعين الرابطة المتغيرة ، وهذه الرابطة ، عند تحديدها ، تربط بين العددين س ، ص • ان المتغيرات من نوع أ ، ب ، حـ المذكورة أعلاه ، والتى تستعمل فى تحديد الرابطـة ، تسـمى (كميـات ثابتة) أو برمترات • وقد يتراءى للقارىء أن استعمال الصفة (ثابتـة) ،

لكميات هي في الواقع متغيرة ، أمر لا يخلو من الغرابة والتناقض • والحقيقة ، إنه أمر طبيعي جدا • لان التحري الرياضي يدور حول العلاقة بين المتغيرين س ، ص على فرض أن أ ، ب ، حـ كميات معينة معلومة • وبهذا الاعتبار ، وبالنسبة الى س ، ص ، تعد الكميات (الثابتة) أ ، ب ، حـ ، كميات ثابتة • وعليه فان أس + ب ص = حـ تقوم بتمثيل عام لصيغة معينة من الصيغ الجبرية ، أي أنها تمثل الرابطة المتغيرة لصنف معين •

كذلك نعمم المعادلة س^{2} + ص^{2} = ١ على الشكل أ س^{2} + حـ ص^{2} = و او بصورة أعم على الشكل أ س^{2} + ٢ ب س ص + حـ ص^{2} = و ، أو أكثر من ذلك عمومية أ س^{2} + ٢ ب س ص + حـ ص^{2} + ٢ د س + ٢ هـ ص = و •

وهنا أيضا ، نلاقي روابط متغيرة تشير اليها الصيغ الجبرية المختلفة •

لنعد الان الى علم الهندسة • ان اسم هذا العلم يدعو لاذهاننا فكرة الاشكال والصور للمثلثات والمستطيلات والمربعات والدوائر ، وما بينها من علاقات خاصة • وان دراسة الخواص السهلة لهذه الاشكال ، هي مواد موضوع الهندسة الاولية ، كما تقدم ، بحق للمبتدىء • على أن تفكير لحظة في الامر ، يكفي لتبيان أن هذه ليست بالفكرة الحقيقية التي تحيط بالموضوع • وقد يكون من الاجدى للطفل ، ان يبدأ مناقشاته الهندسية ، بدراسة الاشكال التي يقصها بالمقص ، كالمثلثات والمربعات •

ولكن ما المثلث ؟ انه شكل معين محدود بثلاث قطع صغيرة من ثلاث خطوط مستقيمة .

ومع ان أمر تحديد المساحات بقطع صغيرة من خطوط ، فكـرة معقدة جدا ، فهى لا تمدنا بتاتا ، بأى شعاع من الامل ينير الطريق الى الافكار السهلة العامة التى تؤلف الهيكل العظمى للموضوع . ان بنا حاجة الى شىء أكثر سهولة وأوسع عمومية . وشغل الذهن بالاراء التى كان البدء بها خطأ ـ مع انها أى تلك الاراء كانت طبيعية وصالحة لابداع الافكار الاولى فى الموضوع ـ هو السبب فى العقم النسبى لهذا العلم ، برغم الانكباب على دراسته هذه العصور العديدة . ويعود فضل الكشف ، عن الاهداف الحقيقية البسيطة للفكر الهندسى ، الى الهندسة الاحداثية والى مبدعها ديكارت .

والان بدلا من أن نفكر فى قطعة من الخط المستقيم ، لنفكر فى المستقيم كله ، بطوله الذى لا نهاية له من الجهتين . ان هذا النوع من الفكر العامة هو الذى يجب أن نبدأ به تحرياتنا الهندسية . ويلوح أن اليونانيين لم يجدوا اية فائدة قط فى هذا التصور ، الذى يعد الان أساسيا فى الفكر الهندسى الحديث بأسره . فقد كان اقليـدس يفكـر فى الخط المستقيم بأنه يصل بين نقطتين معلومتين ، كما كان حريصا جدا على ذكر المواضع التى يقتضى أن يمده فيها الى أكثر من هذا الجزء المحدود . وهو لم يفكر بتاتا بالمستقيم ، على أنه كيان يجب النظر اليه دوما ككل . وهذا التعـريف والتحديد الدقيق ، الذى يقصى فكـرة

اللانهاية ، بوصفها غير واضحة مباشرة للحواس ، كان طابع اليونانيين الخاص في جميع فعالياتهم الكثيرة • وهذا الطابع نجده محفوظا بالفرق الظاهر بين الفن المعماري الاغريقي والفن المعماري القوطي ، وبين الدين الاغريقي والدين الحديث فالمسلة في ذروة كنيسة قوطية ، وأهمية المستقيم الذي لا حدود له في الهندسة الحديثة كلاهما من شعار تطور العالم الحديث •

يظهر مما سبق ، ان النظر الى الخط المستقيم ككل ، هو الفكرة الاصلية التي تبدأ بها الهندسة الحديثة • وهنا ، تخطر على بالنا ، أنواع أخرى من الخطوط ، نتدرج بها الى ادراك معنى المنحنى الكامل ، وهو الذي تكون له ، في كل نقطة من نقاطه ، خاصية مطردة مثلما يكون للخط المستقيم ، **في جميع نقاطه** ، خاصية الاستقامة • لنأخذ الدائرة ، كمثال على ذلك ، فنجد انها ، في جميع نقاطها ، تمتلك خاصية الوقوع على بعد معلوم عن مركزها • كذلك لو أخذنا القطع الناقص ، وهو منحنى بيضي ، لوجدنا أن مجموع بعدى أية نقطة عليه ، عن نقطتين معينتين تسميان البؤرتين ، ثابت لجميع نقاط المنحنى • ومن الواضح أن الدائرة ليست سوى حالة خاصة من حالات القطع الناقص ، وذلك عندما تتطابق البؤرتان في نقطة واحدة ، فيكون مجموع البعدين آنئذ ، ضعف نصف قطر الدائرة • وكان القدماء يعرفون خواص القطع الناقص والدائرة ، ويعدونهما بالطبع كلين تامين • مثال ذلك أن أقليدس ، لم يبدأ بمجرد أجزاء من الدوائر (أى بقطع منها) ثم بعد ذلك يمدها بل كان على

الدوام ، ينظر للدائرة كلها ، كما لو رسمت بتمامها • ولكن الدائرة لسوء الحظ ليست هي الخط الاساسي الصحيح في الهندسة ، لتصبح نظرته الخاطئة للخط المستقيم أقل خطرا •

ان الفكرة العامة عن منحن يمتلك في كل نقطة من نقاطه خاصية مطردة ، يعبر عنها في علم الهندسة ، بكلمة « المحل الهندسي » • فالمحل الهندسي اذاً ، هو منحن أو سطح (اذا لم نقيد أنفسنا بالمستوى) ، مؤلف من نقاط تمتلك جميعها خاصية معينة معلومة • وفي حالة فحصنا لمنحن ، محدود ككل ، يجب النظر في أية نقطة كانت أو نقاط واقعة عليه • وهكذا نلتقي مرة ثانية ، بالفكرة الاساسية للمتغير • وزيادة على ذلك ، نجد أن فكرة الصيغة تظهر مرة أخرى عندما نصنف المحال الهندسية تحت عناوين كالخطوط المستقيمة والدوائر والقطوع الناقصة •••• الخ •

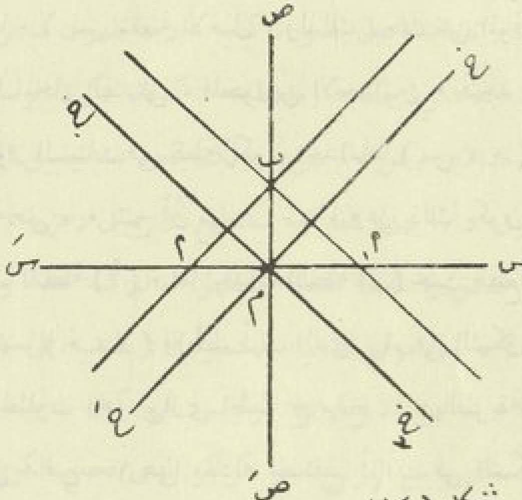
وعلى ذلك ، فكما نهتم في الجبر ، بالاعداد المتغيرة ، والروابط بين الاعداد المتغيرة ، وتصنيف هذه الروابط الى أنواع بالاستعانة بفكرة الصيغة الجبرية ، يجب أن نهتم في الهندسة بالنقاط المتغيرة ، والنقاط المتغيرة تحت شروط ما لترسم محلا هندسيا ، وتصنيف المحال الهندسية الى أنواع ، بالاستعانة بفكرة الشروط ذات الصيغة الواحدة •

ان جوهر الهندسة الاحداثية ، هو تمثيل الروابط الجبرية بالمحال الهندسية • فالنقطة على مستو تمثل جبريا باحداثيها س ، ص ، والشرط الواجب تحقيقه في كل نقطة من نقاط المحل الهندسي ، يمثل جبريا

بالرابطة المناظرة له بين س ، ص • وأخيرا ، يجب أن يكون للروابط، التي يمكن التعبير عنها بصيغة من الصيغ الجبرية العامة ، ما يناظرها من محال هندسية ذات نوع عام ، أي التي تكون شروطها الهندسية ذات صيغة واحدة • وبهذا نكون قد وصلنا الى مرحلة ، نستطيع فيها أن نجرى تبادلا كاملا في الافكار والنتائج ، بين هذين العلمين ، فيلقى كل منهما نورا على الاخر ويستمد منه قوة عظيمة لا يعرف مداها • ويستحيل على المرء ان لا يشعر بهزة نفسية ، عندما يفكر فيما يغمر نفوس الرجال من شعور فياض ، في اللحظات الحاسمة ، لمغامراتهم وكشوفهم ـ كولومبس عندما شاهد شواطىء الغرب أول مرة ، وبزارو عندما وقف ذاهلا يطل على الباسفيك، وفرانكلين عندما نقلت أسلاك طائرته الشرارة الكهربائية ، وغاليلو عندما وجه مقرابه (تلسكوبه) الى السماء • ولا تخلو حياة المشتغلين ، في الحقول الفكرية المحضة ، من مثل هذه اللحظات • وصباح ذلك اليوم الاغر ، الذي أبدع فيه ديكارت طريقة الهندسة الاحداثية ، يجب أن يحتل بينها مكانا رفيعا •

وأول ما يرد على الخاطر ، عندما يدرك المرء فكـرة الهندســة الاحداثية أول مرة ، هو السؤال عن أنواع المحال الهندسـية ، التي تناظر الصيغ الجبرية المعروفة • مثال ذلك : ان أسـهل أنواع الصيغ الجبرية العامة ، هي الصيغة أس + ب ص = حـ ، وأما نوع المحل الهندسى الذي يناظرها ، فهو الخط المستقيم • وعلى العكس من ذلك ، فان كل خط مستقيم ، يناظر معادلة بهذه الصيغة • ومن حسن الصدف ، أن

يكون أسهل المحال الهندسية مناظراً لاسهل الصيغ الجبرية • والحق ، أن هذا التناظر العام ، وسهولته الجبرية الهندسية كان مصدر قوة للموضوع بأسره ، فهو ينبثق عن كون العلاقة بين الهندسة والجبر ليست عرضا أو متكلفة ، ولكنها أساسية متأصلة • ان المعادلـة التى تناظـر محلا هندسيا ، تدعى معادلة المحل الهندسى • وسنوضح الموضوع بأمثلة من معادلات الخطوط المستقيمة •



شكل (١٤)

لنأخذ المعادلة ص − س = • ، فنجد أن − ١ ، ١ ، • قد حلت محل أ ، ب ، حـ فى الصيغة العامة ، وأن خطها المستقيم يمر « بنقطة الاصل » م ، وينصف الزاوية س م ص (راجع الشكل ــ ١٤) ، وهو فى الشكل خَ م خ • أما مروره بنقطة الاصل ، فواضح من ملاحظة ان المعادلة تتحقق اذا جعلنا س = • ، ص = • فى آن واحد ، ولكن

٠ ، ٠ ، هما احداثيا « م » • ونرى ، باتباع الطريقة نفسها ، من السهل ، أن نضع تعميما ينص على أن أى خط يمر بنقطة الاصل يجب أن تكون معادلته على الصيغة أ س + ب ص = ٠ فالمحل الهندسى للمعادلة س + ص = ٠ يمر أيضا بنقطة الاصل وينصف الزاوية سَ م ص وهو فى الشكل الخط خ$_١$ م خ$_٢$ •

لننظر الان فى المعادلة ص − س = ١ ، فنجد ان المحل الهندسى المناظر لها ، لا يمر بنقطة الاصل ، ولذلك نبحث عن الموقع الذى يقطع فيه ، هذا المحل الهندسى ، المحورين الاحداثيين • فنجد أنه يجب أن يقطع محور السينات فى نقطة يكون احداثياها (س ، ٠) ، فاذا جعلنا فى المعادلة ص = ٠ ينتج أن س = − ١ • وعلى ذلك يكون (− ١ ، ٠) هما احداثيا النقطة (أ) • اما احداثيا النقطة (ب) حيث يقطع الخط المحور م ص ، فهما (٠ ، ١) والخط أ ب الذى نراه فى الشكل ، هو المحل الهندسى المطلوب وهو يوازى الخط خ م خَ • وبالطريقة نفسها نصل الى أن س + ص = ١ هى معادلة المستقيم أ$_١$ ب فى الشكل ، وهذا المحل الهندسى يوازى خ$_١$ م خ$_٢$ • ومن السهل البرهنة على توازى الخطين الممثلين لمعادلتين من الصيغتين أس + ب ص = ٠ ، أس + ب ص = حـ •

ان للمجموعة الثانية من المحال الهندسية ، التى ينبغى أن تتطرق اليها ، من الاهمية ما يستلزم افراد فصل خاص بها • ولكننا قبل الاقدام على ذلك ، سنتبسط قليلا فى الافكار الاصلية للموضوع •

لتعيين موقع أية نقطة مثل ن ، نبدأ باختيار موقع نقطة الاصل بصورة كيفية ، ثم نرسم المحورين المتعامدين م س ، م ص وبعد ذلك نعين موقعها بملاحظة احداثيها س ، ص أى م ح ، ن ح (لاحظ الشكل – ١٣) •

كذلك يمكن تعيين موقعها – كما رأينا فى الفصل السابق ، بالمتجه م ن ، على أساس أن فكرة المتجه تتضمن أمرين : اتجاها معينا وطولا معلوما • وأن فكرة اختيار نقطة الاصل بصورة كيفية ، ربما ظهرت – من الوجهة الرياضية البحتة – فكرة سمجة ومصطنعة ، كذلك فكرة الرسم الكيفى للمحورين الاحداثيين م س ، م ص • ولكننا نجد عند تطبيق الرياضيات على حيّز الكون ، أننا بهذه الطريقة نستطيع أن نمثل رمزيا ، وبسهولة تامة ، أعمق الحقائق الاساسية المتعلقة بمظهر العالم كما نتلقاه بحواسنا • ان كل فرد منا ، يعين موقع الاشياء المحسوسة ، بالنسبة الى نقطة أصل يسميها « هنا » اذ من الاعتبارات الرئيسية فى كياننا الجسمانى ، أن نعد موقعنا فى محل ما من الفراغ ، هو المركز الذى نجمع الكون حوله • ومع أنه فى الوسع أن نتصور وجود مخلوقات تنظر الى جميع الظاهرات ، فى الفضاء بأسره ، نظرة متساوية دون تحيز لمكان دون آخر ، فان الامر معنا على العكس من ذلك • فنقطة عند ارجلنا ، تثير من انتباهنا اكثر مما يثيره زلزال فى (كيب هورن) ، او دمار عالم فى المجرة • ولا ريب اننا ، اذا اردنا ان نجعل من معلوماتنا ملكا مشاعا بين اخواننا البشر ، وجب علينا ان نتنازل ، بعض الشيء ، عن انانيتنا الضيقة ، التى تتجلى بقولنا « هنا » ، مشيرين بها ، الى ان موقفنا الشخصى هو مركز الكون • وذلك

بأن نعوض عن كلمة « هنا » بكلمة « تقريبا هنا » • اصطلحت بعض الممالك ، على تسجيل ابعاد الاماكن بالاميال ، اما عن بهو البلدية لاقرب مدينة ، او عن عاصمة البلاد ، اما فى قياس الكرة الارضية ، فان رجال العلم يعدون مركز الارض ، هو نقطة الاصل • ويسمو الفلكيون الى غاية التسامح والغيرية ، عندما يضعون نقطة الاصل ضمن الشمس • واينما وضعنا نقطة الاصل هذه ، حتى اذا ذهبنا بها الى نقطة مناسبة فى احدى النجوم الثابتة القريبة ، فان بعد موقعها عنا ، بالنسبة الى الابعاد اللا متناهية فى الفضاء ، يؤيد صحة القول ، بأن موقع نقطة الاصل ، التى ينبغى تثبيتها لقياس الابعاد الكونية هو « هنا تقريبا » •

ومن جهة اخرى ، فان العلاقة بين الاحداثيين م ح ، ح ن (أى س ، ص) والمتجه م ن هى حالة من حالات قانون متوازى الاضلاع المعروف (راجع الشكل ــ ٨) ، كما يتبين بسهولة ، عند اكمالنا متوازى الاضلاع م د ن ح • ان فكرة « المتجه » م ن ، ونعنى به المقدار ذو الاتجاه ، هى الفكرة الاصلية فى علم الطبيعة ، فكل جسم متحرك ، مقدار معلوم من السرعة فى اتجاه معلوم • وبكلمة اخرى ، ان سرعته هى مقدار ذو اتجاه ، أى متجه • وللقوة كذلك ، مقدار معلوم واتجاه معين • ولذلك كان ادخال فكرة « نقطة الاصل » و « الاحداثيات » و « المتجهات » فى الهندسة التحليلية ، مؤديا الى دراستنا للآراء المجردة ، التى تناظر الحقائق الاساسية فى العالم المادى •

الفصل العاشر

القطوع المخروطية

CONIC SECTIONS

عندما استنفذ علماء الاغريق ـ على حسب ظنهم ـ الخواص البارزة للاشكال المؤلفة من الخطوط المستقيمة والدوائر ، التفتوا الى دراسة منحنيات أخرى • وبتلك الغريزة التي تكاد لا تخطىء في اصابة الاهداف الجديرة بالتفكير ، وقفوا انفسهم لدراسة القطوع المخروطية • وهي المنحنيات الحادثة من قطع المستويات لسطوح المخاريط الدائرية • اما الرجل الذي يعود اليه فضل اختراع هذه الدراسة فهو منا شمس (Menaechmus) «المولود سنة ٣٧٥ ق•م• والمتوفي سنة ٣٢٥ ق•م•» وكان من تلاميذ افلاطون ، وأحد مدرسي الاسكندر الكبير • وبهذه المناسبة نقول ، ان الاسكندر الكبير كان مثالا بارزا على مزايا التعليم الصالح، فقد كان ارسطاطاليس من بين اساتذته الاخرين • ولنا ان نظن ، ان الاسكندر وجد معلمه منا شمس ، على شيء من البلادة • فقد جاء في الاخبار انه طلب الى معلمه اختصار البراهين ، وقد كان جواب منا شمس على هذا الطلب قوله « توجد في البلاد طرق خاصة ، بل طرق سلطانية ، اما في علم الهندسة ، فالطريق واحد للجميع » • ان هذا الجواب كان بلا

شك صحيحا ، بالمعنى الذى كان يقصد ان يفهمه الاسكندر من فوره •
اما اذا اعتقد منا شمس بعـدم امكان اختصـار براهينه ، فقـد كان فى اعتقاده هذا على ضلال مبين • فالرياضيون الحديثون لو اضطروا الى درس خواص القطوع المخروطية بالبراهين الاغريقية ، لوجدوا فى ذلك عنتا وسأماً عظيمين • ولا شىء يصور لنا مدى مانالته القوة العلمية من كسب بنتيجة استحداث آراء سديدة ، احسن من ملاحظة الاختصارات الكثيرة فى البراهين ، وهو الامر الذى يصحب نمو الآراء وغزارتها • وبين الرياضيين فريق ، لايتحمل النظر الطويل فى آراء الموضوع ، بل يتوق الى التقدم ، من فوره ، الى براهين المسائل المهمة • ولكن تاريخ العلم لايؤيد هذا التصرف بتاتا • فى العلم طرق سلطانية ولكن اول من يطؤها ليس الملوك بل نوابغ الرجال •

ان الكيفية التى بدت فيها فكرة القطوع المخروطيـة ﻻرياضيين كانت على الوجه الآتى : (راجع الشكل ١٥) تصور مخروطا رأسه م ، وقاعدته الدائرة س ط و فتجـد ان سطحـه يشبـه سطح نوع من مظلات المصـابيح الكهربائيـة • والان دع الخطـوط المولـدة ، المارة بالنقطة م والمنطبقة على السطح المخروطى ، تمتد الى الوراء ، فتكون النتيجة مخروطا مزدوجا ، وفيه المقطع ن ك ر يقابل المقطع س ط و على الجهة الثانية من م • اما محور المخروط ، وهو حم حَ ، فيمر بمراكز جميع هذه الدوائر ، ويكون عمودا على مستوياتها ، التى يوازى بعضها البعض • وانك لواجد فى الشكل ، ان اجزاء المنحنى التى يفترض انها

تقع وراء مستوى الصحيفة ، قد رسمت على هيئة خطوط منقطة[١] ، اما الاجزاء التي تقع على مستوى الصحيفة او امامها ، فقد رسمت كخطوط متصلة .

والان لنفرض أن هذا المخروط المزدوج ، قطع بمستو لم يكن موازيا لمحوره حـ م حـَ ، أو على الاقل ليس من الضرورى أن يكون موازيا له فينشأ عن ذلك ثلاث حالات :

الاولى ـ أن يحدث من قطع المستوى للمخروط منحنى بيضى مقفل أ ب آ بَ ، يقع بتمامه على أحد نصفى المخروط المزدوج . وفى هذه الحالة لا يلتقى المستوى مع النصف الثانى للمخروط . ومثل هذا المنحنى يسمى القطع الناقص (Ellipse) ، وهو منحن بيضي . ولهذا المقطع حالة خاصة ، عندما يكون المستوى القاطع عمودا على المحور حـ م حـَ ، فيكون شكل المقطع اذ ذاك دائرة مثل س ط و ، ن ك ر . وعلى ذلك فالدائرة هى حالة خاصة من القطع الناقص .

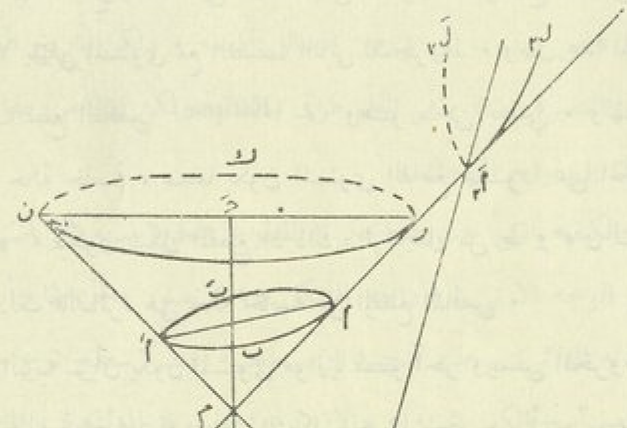
الثانية ـ أن يكون المستوى موازيا لمستو آخر ، يمس المخروط فى أحد الخطوط المولدة له . ففى الشكل نجد المستوى $د_١ أ_١ دَ_١$ يوازى المستوى الذى يمس المخروط فى الخط المولد م س . وفى هذه الحالة أيضا ، يكون المنحنى محصورا فى سطح أحد نصفى المخروط المزدوج .

---

(١) فى الشكل ١٥ كان يجب أن يكون أ بَ آ منقطا لا متصلا . كذلك النصف الامامى من كل من الخطين $هـ_٢ هـَ_٢$ ، $د_١ دَ_١$ ، كان يجب أن يكون متصلا لا منقطا .

ولكنه الان ليس بالمنحنى البيضى المقفل ، بل يمتد دون نهاية ، بقدر ما يمكن مد الخطوط المولدة وابتعاد نهاياتها عن الرأس • ومثل هذا القطع المخروطى ، يسمى القطع المكافىء (Parabola) •

الثالثة ـ أن يقطع المستوى نصفى المخروط المزدوج معا ، بحيث يتألف المنحنى الكامل من جزئين أو « فرعين » كما يسميان • وتجد صورة ذلك فى الشكل اذا نظرت الى الفرعين هـ٢ أ٢ هـَ٢ ، ل٢ آ٢ لَ٢ اللذين يتألف المنحنى منهما معا • وكل من هذين الفرعين ليس مقفلا ، بل يمتد دون نهاية بامتداد الخطوط المولدة لنصفى المخروط ، وابتعادها عن الرأس • ومثل هذا القطع المخروطى يسمى القطع الزائد (Hyperbola).

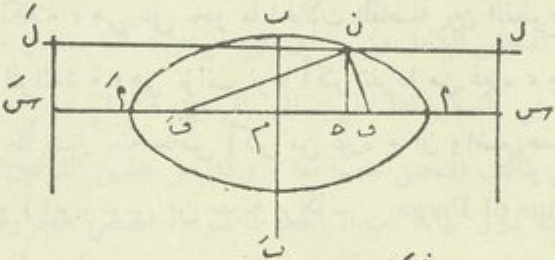


شكل (١٥)

وعلى ذلك توجد ثلاثة أنواع من القطوع المخروطية ، وهى القطع الناقص والقطع المكافىء والقطع الزائد • ومن السهل أن نرى ، أن القطوع المكافئة ، هى على نحو ما الحالات الفاصلة بين القطوع الناقصة والقطوع الزائدة • وهى تؤلف نوعا أكثر تفردا من غيره ، وينبغى أن تحقق شرطا يمتاز بأنه خاص أكثر من غيره • ان واضع هذه الاسماء الثلاثة هو (ابولونيوس من مدينة برگا ــ Apollonius of Perga المولود حوالى سنة ٢٦٠ ق • م والمتوفى سنة ٢٠٠ ق • م) • وقد وضع رسالة منسقة عن القطوع المخروطية ظلت المرجع الاساسى حتى القرن السادس عشر •

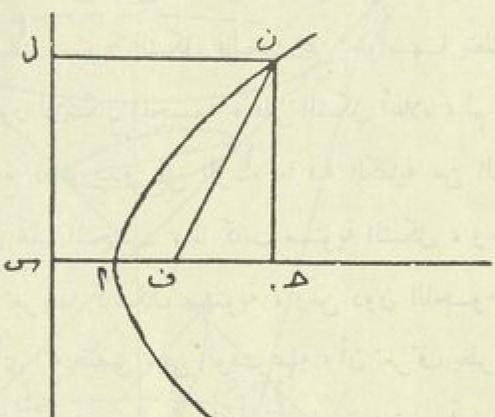
ويستبان على الفور ، مدى ما عاناه علماء الهندسة الاغريق ، من صعوبة ومشقة ، فى تحرياتهم عن خواص هذه المنحنيات ، فهى على كونها منحنيات مستوية الشكل فالبحث عن خواصها يتطلب استعمال الرسم المنظور للاشكال المجسمة • ففى الشكل أعلاه ، لم نرسم خطوطا مساعدة ومع ذلك يبدو على الرسم ما فيه الكفاية من التعقيد • ومن الواضح أن هذه المنحنيات ، لما كانت مستوية الشكل ، وجب أن يكون فى الوسع تعريفها كأشكال مستوية ، ومن دون اللجوء الى الشكل المجسم • أى انه يقتضى ، فى الوقت عينه ، أن تعرّف بطريقة ذات نسق واحد ، كما جرى تعريفها بواسطة المجسمات • وبتعبير آخر ، كما أن قطع المستوى لمخروط أنتج ثلاث حالات ، كذلك يجب أن يتم تعريفها كشكل مستو ، بطريقة ذات أصل واحد ، تتشعب عنه ثلاث حالات • أما صورها

عندما ترسم على مستوياتها فتمثل بالخطوط المنحنية فى الاشكال ١٦ ،



شكل (١٦)

١٧ ، ١٨ . وتسمى النقاط أ ، آ فى الاشكال هذه (بالرؤوس) ،



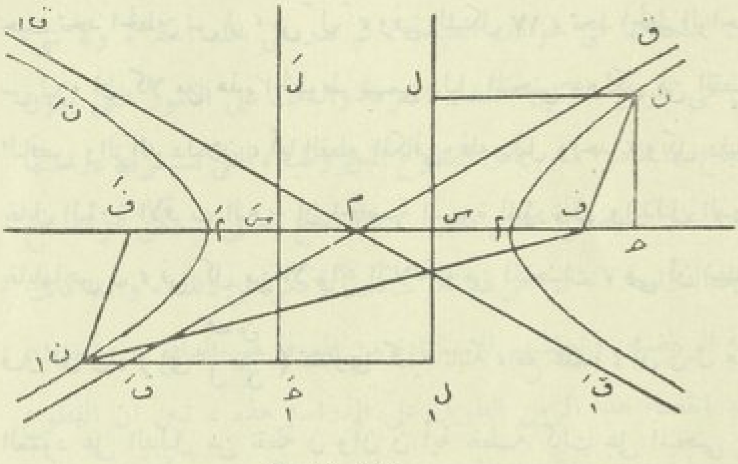
شكل (١٧)

والخط أ آ بالمحور الكبير ، وجدير بالملاحظة أن للقطع المكافىء رأساً

واحدا • وقد برهن أبولونيوس ، أن النسبة

$$\overline{\text{ن ح}}^{2} \text{ الى } \overline{\text{ا ح}} \times \overline{\text{ح ا}'} \quad \left(\text{ى} \quad \frac{\overline{\text{ن ح}}^{2}}{\overline{\text{ا ح}} \times \overline{\text{ح ا}'}} \right)$$

تبقى ثابتة فى كل من القطع الناقص والقطع الزائد ، (شكل ١٦ ، ١٨)، وان نسبة $\overline{\text{ن ح}}^{2}$ الى أ ح تكون ثابتة فى القطع المكافى (شكل ١٧) • ولقد قام معظم عمله على هذه الحقيقة • يظهر من ذلك ، اننا نتقرب من تعريفها جميعا ، بتعريف ذى نسق واحد يعدها منحنيات مستوية غير اننا لم نصل بعد الى هذا النسق •



شكل (١٨)

نجد فى الشكلين ١٦ ، ١٨ ، النقطتين ف ف وفى الشكل ١٧ النقطة ف وهى نقاط على غاية الاهمية وتدعى (بؤر) المنحنى • وكان أبولونيوس على علم بأنه ، أينما وقعت النقطة ن المتحركة على منحنى

القطع الناقص ، فان مجموع ف ن ، ف َن (أى ف ن + ف َن) يكون ثابتا ومساويا الى أ آ . أما فى القطع الزائد ، فيكون ف َن - ف ن ثابتاً ومساويا الى أ آ ، عندما تتحرك ن على أحد الفرعين ، كما يكون الفرق ف ن َ - ف ن َ ثابتا ومساويا الى أ آ عندما تكون ن على الفرع الآخر . ولكنه لا توجد نقطة تقابل ذلك على المقطع المكافىء .

وأخيرا ، وبعد مرور ٥٠٠ عام ، كشف اخر علماء الاغريق فى الهندسة ، وهو پاپس الاسكندرى ، عن السر الاخير الذى أكمل هذه السلسلة الفكرية . وتفصيل ذلك تجده بملاحظة الشكلين ١٦ ، ١٨ ، حيث تجد الخطين س ل ، س َل َ ، وفى الشكل ١٧ ، تجد الخط الواحد س ل . ان كلا من هذه الخطوط يسمى دليل المنحنى ، ولكل من القطع الناقص والزائد دليلان ، أما القطع المكافىء فله دليل واحد ، وكل دليل يقابل البؤرة الاقرب اليه . ان الخاصية المميزة للبؤرة ف والدليل الذى يقابلها س ل ، فى كل من الانواع الثلاثة ، من المنحنيات ، هى أن نسبة ف ن الى ن ل (أى $\frac{\text{ف ن}}{\text{ن ل}}$) تساوى كمية ثابتة ، مع علمنا ، أن ن ل هو العمود على الدليل من نقطة ن وأن ن أية نقطة كانت على المنحنى . وبهذه نكون قد وجدنا الخاصية المطلوبة للمنحنيات ، وهى لا تتطلب الخروج عن المستوى ، كما انه يمكن النص عليها بنسق واحد للمنحنيات الثلاثة جميعا . ففى القطع الناقص تنقص النسبة $\frac{\text{ف ن}}{\text{ن ل}}$* عن الواحد

* راجع الملاحظة ب فى آخر الكتاب .

الصحيح أي أنها تكون أقل منه ، وفي القطع المكافيء ، تكافئه أي تكون مساوية للواحد ، أما في القطع الزائد ، فتزيد عن الواحد أي تكون أكبر منـــه .

ولا شك ان پاپس عندما أنهى تحقيقاته شعر ، باستثناء بعض التفاصيل الصغيرة ، بانه قد استنفذ الموضوع وأداه حقه . ولو أمكنه أن ينفذ ببصره في مستقبل العلم ، للالف سنة التي أعقبت زمانه لآمن بصحة شعوره هذا . أما الحقيقة ، فهي أن الافكار المثمرة حقا في هذا الفرع من الرياضيات لم تكن قد مست بعد ، كما أن أهميتها العظيمة ، من حيث استعمالها في حوادث الطبيعة ، لم تدر في خلد أحد . ولا شيء أفعل في نفوس القائلين باقتصار المعرفة والبحث على الامور التي يكون الانتفاع بها ظاهرا ، من تأمل القطوع المخروطية ، التي استمرت دراستها ١٨٠٠ عام كموضوع علمي مجرد . فالانتفاع العملي لم يكن هو الدافع الى تلك الدراسة لانه لم تكن قد تكونت بعد أية فكرة عن ذلك . وانما كانت رغبة الرياضيين وتعطشهم للاستزادة من المعرفة هي الدافع . وأخيرا ، وبعد انقضاء هذا الزمن الطويل على الدراسة هذه ، تبين أن القطوع المخروطية ، هي المفتاح الضروري للتوصل الى معرفة قانون من أهم قوانين الطبيعة .

وفي الوقت نفسه ، كانت دراسة علم الفلك ، وهو موضوع متميز بذاته ، تتقدم الى أمام . فالفلكي الاغريقي بطليموس (المتوفى سنة ١٦٨ ب . م) . كان قد نشر في جامعة الاسكندرية بحثه الانموذجي

عن الموضوع ، شارحا ثبوت الارض ، ودوران الشمس والسيارات حولها • وفى خلال الـ ١٣٠٠ عام التى أعقبت ذلك ازداد الرصد الفلكى عددا ودقة • وكانت النتيجة ، أن أخذ وصف حركات الكواكب السيارة ، بموجب فرضية بطليموس ، يزداد تعقدا وصعوبة • وبعد ذلك أشار كوبرنيكوس (المولود سنة ١٤٧٣ ب • م والمتوفى سنة ١٥٤٣ ب • م) ، بامكان تفسير حركات هذه الاجرام السماوية بأسلوب أسهل ، فيما لو فرضنا أن الشمس ثابتة وأن الارض والكواكب السيارة تدور حولها • ومع أنه استمر يعتقد أن هذه الحركات دائرية ، فقد قال بوجوب تعديلها وذلك باجراء مجموعة من التصحيحات الكيفية الصغيرة على الحركة الدائرية الاصلية • كان الامر مستقرا على الوجه الذى ذكرناه ، عندما ولد كپلر الالمانى ، فى مدينة ستگارت Stutt Gart عام ١٥٧١ ب • م • ومع أن كلا من علم الفلك ، وعلم هندسة القطوع المخروطية ، كان موضع الدرس ، فمنذ الازمنة القديمة ، فان وجود علاقة ما بين الاثنين لم يخطر على بال أحد • وكان كپلر فلكيا ، كما كان متضلعا فى علم الهندسة ، أما فى القطوع المخروطية فقد توصل الى آراء ، سبق بها زمانه • وهو أحد الامثلة العديدة ، على خطأ الفكرة القائلة ، بأن النجاح فى البحث العلمى ، يكون حليف المتفرغ لناحية ضيقة من الدراسة • ذلك أن الاراء الجديدة ، أدعى الى ان تصدر من مجموعة فنون شتى من المعرفة مع ادراك تام ، لما تنطوى عليه الاتجاهات الفكرية المتمايزة من أساليب وآراء ، وليس من الضرورى عن معلومات

كثيرة •

وقد يتذكر القارىء أن مما ساعد جارلس داروين على الوصول الى فكرة قانون النشوء والارتقاء ، قراءته لرسالة مالثوس الشهيرة عن السكان • وهى بحث يدور عن موضوع يختلف عن أبحاث داروين أو هذا ، على الاقل ، ما كانوا يتصورونه فى ذلك الحين •

جاء كپلر بثلاثة قوانين لحركة الكواكب السيارة • ظهر الاثنان الاولان منها عام ١٦٠٩ ، أما الثالث فظهر بعد عشر سنوات وهى كما يأتى :

١ – ان أفلاك الكواكب السيارة ، قطوع ناقصة ، وفى بؤرتها تقع الشمس •

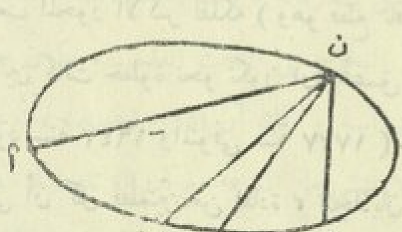
٢ – يمر نصف القطر المتجه Radius Vector – وهو الخط الواصل بين الكوكب والشمس أثناء سير الكوكب فى فلكه، على مساحات متساوية فى أوقات متساوية •

٣ – يتناسب مربع الزمن الدورى لكل من الكواكب السيارة ، مع مكعب المحور الاكبر لفلكه (وهو قطع ناقص) •

ان هذه القوانين كانت خطوة نحو تكون آراء أعمق أساسا ، ذلك أن نيوتن ، (المولود سنة ١٦٤٢ والمتوفى سنة ١٧٢٧) ، أدرك فكرة الجذب العام • وهى أن كل قطعتين من المادة ، تتجاذبان بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بينهما • وهذا القانون العام الشامل ، والقوانين الثلاثة للحركة ، التى وضع هو صيغها

النهائية العامة ، برهنت على كفايتها فى تفسير جميع الظاهرات الفلكية ، بما فيها قوانين كپلر . كما انها أصبحت عماد الفيزياء الحديثة . وكان من جملة ما برهنه ، أن المذنبات يمكن أن تتحرك فى مدارات ، على شكل قطوع ناقصة أو قطوع مكافئة . أما المذنبات التى يتكرر ظهورها ، مثل مذنب هالى ، فان مداراتها يجب أن تكون ، بالطبع ، قطوعا ناقصة . ولكن الخطوة الاساسية ، فى برهان قانون الجذب العام ، بل فى الايحاء بادراكه البدائى ، كانت فى العمل على التحقق من صحة قوانين كپلر ، التى تربط حركات الكواكب السيارة بنظرية القطوع المخروطية .

ومنذ القرن السابع عشر فصاعدا ، ساعدت النظرية المجردة للمنحنيات ، على القيام بعمل مزدوج للنهوض بعلم الهندسة ، وذلك بابتداع علم الهندسة الاحداثية Coordinate Geometry وعلم هندسة المساقط Projective Geometry فالافكار الاساسية فى هندسة المساقط ، تتجمع حول فكرة مجموعة الخطوط (أو الحزمة كما تسمى) المارة بنقطة مشتركة (هى رأس الحزمة) .



شكل (١٩)

فاذا كانت أ ، ب ، حـ ، د فى الشكل ١٩ ، أربع نقاط ثابتة على قطع مخروطى ،وكانت ن نقطة متغيرة على المنحنى ، يكـون لحـزمة الخطوط ن أ ، ن ب ، ن حـ ، ن د ، خاصية معينة ، وهى الخاصية المعروفة باسم ثبوت النسبة اللاتوافقية لها Constancy of its cross ratio ويكفى أن نقول هنا ، ان النسبة اللاتوافقية هذه ، فكرة أساسية فى علم هندسة المساقط (Projective Geometry) وفيه يعتمد عليها أو على خاصية مرادفة لها فى تعريف المنحنيات • ويتضح من ذلك مدى ابتعادنا ، خلال العصور المتعاقبة من الدرس ، عن الفكرة القديمة الاصلية العائدة لقطوع المخروط الدائرى القائم • وهكذا يتبين ، ان ماتوصل اليه الاغريق لم يكن أكثر من معرفة خاصية صغرى ، ذات أهمية تافهة نسبيا • ومن حسن الحظ ، وبالتوفيق الربانى ، كانت هذه المنحنيات جديرة بالعناية التى بذلت فى درسها • ويتجلى عـدم أهميـة فكـــرة « القطع » ، أن هذه الكلمة أصبحت تسقط الآن من التعابير الرياضية المعتادة • فكثيرا ما يطلق على القطوع المخروطية اسم « المخروطيات » وحـده •

وأخيرا نعود الى الفكرة التى تركنا عندها بحث الهندسة الاحداثية فى الفصل السابق ، فقد سألنا هناك عن نوع المحال الهندسية التى تناظر الصيغة الجبرية العامة أس + ب ص = حـ • وكان الجواب أنها من صنف الخطوط المستقيمة فى مستوى الاحداثيين • كذلك وجدنا أن لكل خط مستقيم معادلة ذات صيغة كهذه ، وأن لكل معادلة بهذه الصيغة مستقيما

يناظرها . ونريد الان أن نتقدم الى النوع العام الثانى من الصيغ الجبرية . وهى بلا شك المعادلات التى تحتوى على حدود فيها $س^٢$ ، س ص ، $ص^٢$. ويجب أن تكون الصيغة العامة الجديدة على الشكل

$$أ س^٢ + ٢ ب س ص + حـ ص^٢ + ٢ د س + ٢ هـ ص + و = ٠$$

ولنسأل الان ماذا تمثل هذه ؟ والجواب على ذلك ، أنها تمثل قطعا مخروطيا ، ان كانت تمثل محلا هندسيا ما . وفضلا عن ذلك فمعادلة كل قطع مخروطى يمكن أن توضع على هذه الصيغة . أما تمييز الاشكال الخاصة المختلفة للمخروطيات ، كما تعطى بهذه الصيغة من المعادلة ، فأمر على غاية السهولة ،ويعتمد كليا على $أ حـ - ب^٢$ ، وفيها أ ، ب ، حـ ، وهى الكميات الثابتة نفسها ، والمدونة أعلاه فى المعادلة . فان كانت $أ حـ - ب^٢$ عددا موجبا ، يكون المنحنى قطعا ناقصا . وان كانت $أ حـ - ب^٢ = ٠$ يكون المنحنى قطعا مكافئا . اما اذا كانت $أ حـ - ب^٢$ عددا سالبا فيكون المنحنى قطعا زائدا .

مثال ذلك اذا كانت أ = حـ = ١ ، ب = د = هـ = ٠ ، و = - ٤ نحصل على المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٤ = ٠$ ومن السهل البرهنة على أن هذه معادلة دائرة ، مركزها نقطة الاصل ، وطول نصف قطرها ٢ (أى وحدتان) ، وفيها تكون $أ حـ - ب^٢ = ١ × ١ - ٠^٢ = ١$ ، أى أنها كمية موجبة . فالدائرة اذاً حالة خاصة من القطع الناقص ، كما يجب أن تكون . وبتعميم القضية ، يمكن وضع معادلة أية دائرة على الصيغة $أ (س^٢ + ص^٢) + ٢ د س + ٢ هـ ص + و = ٠$ ، وفيها نجد

أن أ حـ − ب^{٢} تصبح أ^{٢} − ٠ أى أ^{٢} وهى كمية موجبة حتما .

وعلى ذلك فالدوائر تحقق شرط القطوع الناقصة . اما الصيغة العامة لمعادلة القطع المكافىء ، فهى (ر س + ح ص)^{٢} + ٢ د س + ٢ هـ ص + و = ٠ ، أى أن الحدود ذات الدرجة الثانية ، كما تسمى ، يمكن كتابتها على شكل مربع كامل . وباجراء عملية التربيع نحصل على المعادلة :

ر^{٢} س^{٢} + ٢ ر ح س ص + ح^{٢} ص^{٢} + ٢ د س + ٢ هـ ص + و = ٠ وبمقارنتها مع المعادلة العامة نجد ان أ = ر^{٢} ، ب = رح ، حـ = ح^{٢} . ومنه ينتج ان :

أ حـ − ب^{٢} = ر^{٢} ح^{٢} − (ر ح)^{٢} = ٠ ، وعليه يكون الشرط الضرورى متوفرا ذاتيا . اما المعادلة ٢ س ص − ٤ = ٠ ، وفيها (بالمقابلة مع المعادلة العامة) أ = حـ = د = هـ = ٠ ، ب = ١ ، و = −٤ ، فتمثل قطعا زائدا ، لان الكمية المميزة ، أ حـ − ب^{٢} تصبح ٠ − ١^{٢} أى −١ وهى كمية سالبة .

ان الشرط الذى وضعناه ، بقولنا ، ان كانت المعادلة العامة تمثل محلا هندسيا ما فهى تمثل قطعا مخروطيا ، كان ضروريا . اذ توجد حالات خاصة للمعادلة العمومية لا تمثل محلا هندسيا حقيقيا . مثال ذلك ان س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٠ لا تصح لاية قيمة حقيقية تعطى لـ س ، ص .

وقد جرت العادة أن يقال ، فى مثل هذه الحالة ، ان المحل الهندسى

يتألف من نقاط تخيلية . وفكرة النقاط التخيلية ، فى علم الهندسة ، على غاية التعقيد ولن نتطرق اليها هنا .

تقع فى نطاق الصيغة العامة للمعادلة ، حالات خاصة ، لا يتبادر للذهن انها قطوع مخروطية . فبالوسع ، اذا اخترنا الاعداد الثابتة فى المعادلة بشكل مناسب ، أن نجعل المعادلة تمثل خطين مستقيمين . ولا نعدو الصواب اذ قلنا ، أن المستقيمين المتقاطعين ، يمكن أن يمثلا قطعا مخروطيا ، وذلك بموجب الفكرة الاغريقية عن القطوع المخروطية . فلو رجعنا الى صورة المخروط المزدوج أعلاه (شكل ١٥) لتبين لنا أن بعض المستويات المارة بالرأس م ، تقطع المخروط بخطين مستقيمين متقاطعين فى م . ويمكن أيضا عد المستقيمين المتوازيين ، من القطوع المخروطية . وذلك بأن نعتبر الاسطوانة الدائرية القائمة ، حالة خاصة من المخروط ، فاذا قطعها مستو مواز للمحور ، كان المقطع ، مستقيمين متوازيين . وعلى كل ، سواء أجاز الاغريقى القديم عد هذه الحالات الخاصة قطوعا مخروطية ، أم لم يجز ، فهى بلا شك ، من المنحنيات التى تمثلها الصيغة الجبرية العامة للمعادلات ذات الدرجة الثانية . وهذه حقيقة جديرة بالملاحظة ، اذ من مميزات الرياضيات الحديثة ، أن تتضمن فى صيغها العامة كل الحالات الخاصة ، التى كانت تعالج قبلا على انفراد ، لان الرياضيات تتوخى العمومية على الدوام .

الفصل الحادى عشر

الدوال

FUNCTIONS

اقتبست الحياة العامة استعمال كلمة دالة Function بمعناها المستعملة به فى الرياضيات • مثال ذلك أن نقول « ان مزاج الانسان دالة هضمه » ، نكون قد استعملنا الكلمة بمعناها الرياضى نفسه • ويكون المقصود بها ، امكان تحديد قاعدة ، تنبؤنا عن حالة مزاجه اذا علمنا حالة هضمه • فالفكرة سهلة بحد ذاتها ، وما علينا الا أن نرى كيفية تطبيقها فى الرياضيات على الاعداد المتغيرة • ولنبدأ بأمثلة محسوسة : اذا سار قطار بمعدل (٢٠) ميلا فى الساعة ، فالمسافة (م ميلا) ، التى يقطعها خلال أى عدد من الساعات ، وليكن ن ، تحسب بموجب الدستور م = ٢٠ ن • ويقال لـ (م) انها دالة ن • كذلك ٢٠ ن تعد دالة ن أيضا وهى تطابق م • واذا كان جون أكبر من توماس بسنة واحدة ، فمهما كان عمر توماس ، ولنفرضه (س) من السنوات ، فان عمر جون ، ولنفرضه (ص) سنة ، يحسب بموجب القاعدة ص = س + ١ •

وتكون ص ، دالة س أى أنها س + ١ .

وفى هذين المثالين ، تسمى كل من (ن) و (س) سند الدالة Argument of the function وعلى ذلك فان ز ، سند الدالة ٢٠ ن ، و (س) سند الدالة س + ١ . واذا كانت م = ٢٠ ن ، ص = س + ١ فان كلا من م ، ص تدعى « قيمة » الدالة ٢٠ ن ، س + ١ على الترتيب .

لنتقدم الان الى الحالة العامة ، فنعرّف الدالة فى الرياضيات ، بانها رابطة بين عددين متغيرين – يدعى أولهما سند الدالة وثانيهما قيمتها – بحيث اذا أعطينا أية قيمة كانت « لسند الدالة » ، نجم عنها « قيمة معينة للدالة » . وليس من الضرورى أن يكون العكس صحيحا ، أى أنه اذا تعينت قيمة الدالة ، لزم أن ينجم عن ذلك أيضا ، قيمة معينة فريدة للسند . واليك دوال أخرى سندها س ، مثل ص = س^{٢} ، ص = ٢ س^{٢} + ٣ س + ١ ، ص = س ، ص = لو س ، ص = جا س . والمثالان الاخيران من هذه المجموعة ، يقتضيان معرفة القليل من الجبر والمثلثات للتعرف بهما . ومن العبث ان نصرف الان وقتا فى ايضاحهما ، لاننا لم نذكرهما الا على سبيل المثال .

لقد بينا ما نعنيه بالدالة بصورة عامة . ولم نذكر حتى الان الا سلسلة من الدوال الخاصة . ولكن الرياضيات ، وهى بحكم الطبع تنزع الى تعميم اساليبها ، ترمز الى الفكرة العامة لكل دالة بالرموز د (س) ، هـ (س) ، و (س) ، ..... الخ ، اذا كان سندها س . أى انه لكتابة

دالة ما ، يوضع السند بين قوسين ويسبقه حرف ما ، مثل د ، ه ، و ، ...... الخ ليرمز للدالة . ولهذا الاصطلاح الرمزى معائبه ، فهو يناقض العرف السائد ، من ان الحروف المفردة تمثل اعدادا متغيرة . ولكن الحروف د ، ه ، و ، .... الخ لما كانت فى هذه الحالة تثبت بازاء قوسين فهى تمثل دوالا متغيرة . ومن السهولة ان نورد امثلة ، لايمكن الاعتماد فيها على غير الفطنة وسياق البحث ، لتبين المقصود من الرمز . واحدى وسائل تجنب هذا الالتباس استعمال الحروف الاغريقية للدوال . ووسيلة أخرى ، هى الاعتماد على د (وهى الحرف الاول من كلمة دالة) . واذا دعت الحاجة الى الرمز عن دوال متغيرة أخرى فتستعمل الحروف الابجدية المجاورة للحرف د مثل ه ، و .

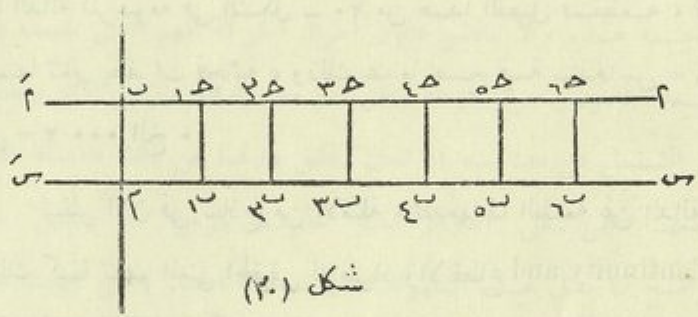
فاذا كتبنا ص = د (س) ، وراعينا الشروح والحدود التى اسلفنا ذكرها ، فاننا نعنى ان ص هى قيمة دالة غير معينة ، وان سندها س . أى ان د (س) يمكن ان تمثل أى شيء مثل ، س + ١ ، س^{٢} - ٢ س + ١ ، جاس ، لو س ، او مجرد س وحدها . والامر الاساسى ، هو ان ص تتعين بصورة قطعية ان علمت س . ومن المهم ان يكون ما نقصده بعمومية هذه الفكرة واضحا . ففى ص = د (س) يسوغ لنا ان نعين د (س) ، اذا شئنا ، بقولنا مثلا ، ان د (س) تكون صفرا عندما تكون س عددا صحيحا ، وانها تكون واحدا اذا كانت س أى عدد آخر . وعلى ذلك ، ووفق هذا الاختيار لمعنى د ، فان ص ، اما ان تكون صفرا او واحدا ، على حسب ما تكون س عددا صحيحا او عددا غير صحيح . وينتج عن

ذلك مثلا ان د (١) = ٠ ، د (٢) = ٠ ، د ($\frac{٢}{٣}$) = ١ ، د ($\sqrt{٢}$) = ١ وهكذا • ان هذا الاختيار لمعنى د (س) ، يعطينا دالة صحيحة مضبوطة للسند (س) ، وينطبق على المعنى العام للدالة •

وبعد كل ذلك ، فالدالة ليست الا نوعا من الرابطة بين متغيرين • وهى تمثل بالخط البيانى ، كما يمثل غيرها من الروابط ، بطرق الهندسة الاحداثية • مثال ذلك ان الرسم ، فى شكل ٢ من الفصل الثانى ، هو الخط البيانى للدالة $\frac{١}{ح}$ ، وفيها ح هى السند و ص قيمة الدالة ، وقد اقتصر الرسم على قيم ص الموجبة فقط ، لانها القيم الوحيدة التى لها معنى عملى فى التطبيق الفيزياوى ، الذى كان موضع النظر فى ذلك الفصل • كذلك فى الشكل ـ ١٤ من الفصل التاسع ، يكون المستقيم أ ب ، غير المحدود من جهتيه ، هو الخط البيانى للدالة س + ١ ، وفيها س هى السند و ص قيمة الدالة • وفى الشكل نفسه نجد ان المستقيم غير المحدود أ$_{١}$ ب هو الخط البيانى للدالة ١ ـ س ، والمستقيم خ م خَ هو رسم الدالة س ، وفيها س هى السند و ص قيمة الدالة •

ان مثل هذه الدوال ، التى يعبر عنها بدساتير جبرية بسيطة ، يسهل تمثيلها بالخطوط البيانية • على انه توجد دوال ، يكون مثل هذا التمثيل لها ، مضللا او مغلوطا فيه ، ما لم تكن مشفوعة بايضاحات مفصلة ، ويستحيل تمثيلها احيانا • فلننظر مثلا فى الدالة التى ذكرت اعلاه ، والتى تكون قيمتها الواحد الصحيح ، مهما كانت قيم سندها س.

الا تلك التي تكون عددا صحيحا • ففي تلك الحالة ، أي اذا كانت س = ٠ ، س = ١ ، س = ٢ ، س = ٣ •••• الخ ، تكون قيمة الدالة صفرا • اما مظهرها ، بالخطوط البيانية ، فيكون على هيئة الخط أ ب الموازي للمحور س م سَ ، والذي يبعد عنه بمقدار وحدة طولية واحدة ، على ان تحذف منه النقاط ب ، حـ$_1$ ، حـ$_2$ ، حـ$_3$ ، حـ$_4$ ،



شكل (٢٠)

••• الخ وهي التي تناظر القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ••• الخ للسند س ، وان يستعاض عنها بالنقاط م ، ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ ، ب$_4$ •••• الخ الواقعة على محور السينات • ومن السهل ايجاد دوال ، لا يكون من المتعب حسب ، تمثيلها بيانيا ، ولكنه من المستحيلات • وهذه الدوال التي لا تقبل التمثيل البياني ، على اهميتها في الرياضيات العالية ، لا حاجة للتطرق الى ذكرها هنا مرة اخرى •

ان اهم تصنيف لانواع الدوال هو تقسيمها الى دوال مطردة ودوال منقطعة • وتكون الدالة مطردة Continuous اذا تغيرت

قيمتها بالتدرج بتغير قيمة سندها بالتدرج . وتكون منقطعة Discontinuous اذا تغيرت قيمتها بطفرات فجائية . فالدالتـان س + ١ ، ١ – س مثلا ، اللتان رأينا خطوطهما البيانية على شكل مستقيمين ، (راجع الشكل ــ ١٤ من الفصل التاسع)، هما دالتان مطردتان. وكذلك الدالة ١/ح المرسومة في الفصل الثانى مطردة اذا اقتصرنا الامر على القيم الموجبة للكمية ح . اما الدالة المرسومة فى الشكل ــ ٢٠ من هـذا الفصل فمنقطعـة ، لان قيمتها تتغير بطفرات فجائية ، وذلك عندما تصبح قيمة سندها س = ١ ، س = ٢ ... الخ .

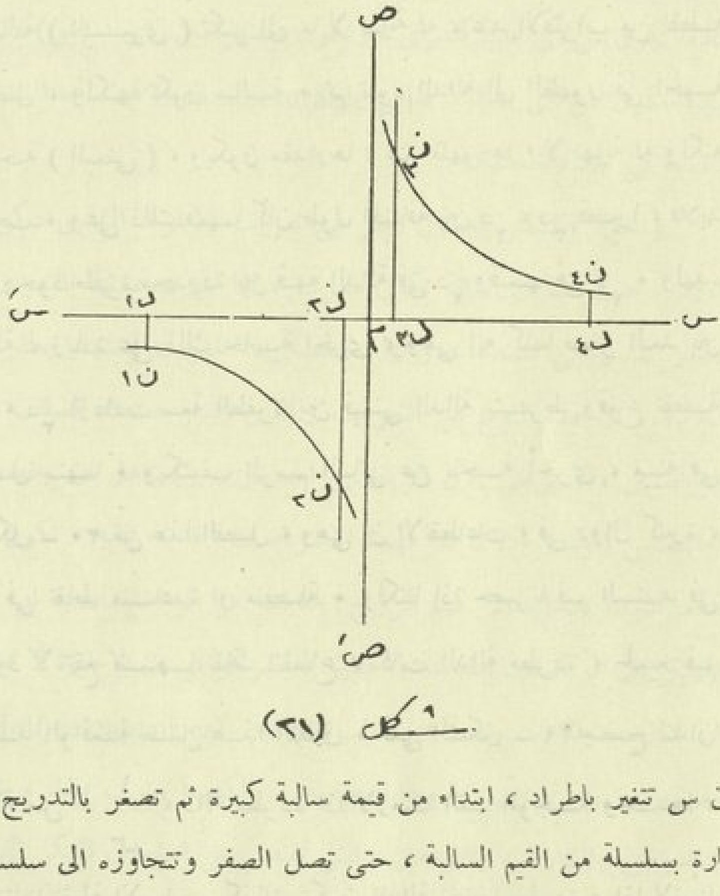
لننظر الان فى نماذج من الامثلة ، تقدمها لنا الطبيعة عن الدالة ، وذلك كيما نتفهم المعنى الحقيقى للاطراد والانقطاع Continuity and) discontinuity) . لنأخذ القطار فى رحلته على الخط الشمالى الغربى للسكة الحديد ، من محطة بوستن الى المحطة النهائية فى لندن ، فنجد ان المحطتين بلشلى وركبى تقعان بالتعاقب على هذا الخط . ولنفرض ان ن هى عدد الساعات التى قضاها القطار فى سيره ابتـداء من بوستن ، وان م عدد الاميال التى قطعها . وعليه تكون م دالة ن ، أى انها القيمة المتغيرة التى تناظر السند المتغـير ، ن . واذا كنا على علم بأحوال سـير القطار ، فيقتضى ان نعرف مقدار م حال معرفتنا لاية قيمة معينة للزمن ن . والان ، اذا تركنا الخوارق والمعجزات جانبا ، يمكننا ان نقول بثقة ، ان م دالة مطردة لـ ن . ولو روى لنا أحد ، انه تعقب سـير القطـار

باطراد من بوستن الى بلشلى ، وبعد ذلك ، وبدون أى فاصل زمنى مهما كان قصيرا ، ظهر القطار بغتة فى رگبى ، لما سلمنا وقوع مثل هذا الحادث اطلاقا ، لانه اغرب من ان يدخل فى الحسبان • ان تصور هذه الاحتمالات ، لا يقع خارج كتاب ألف ليلة وليلة وحتى فى تلك القصص، لا يقحم على التصور انعدام الزمن فى الحركة• فهى لا تتحدى سذاجتنا ، باكثر من انتقال الاشياء بسرعة فائقة • ولكن السرعة العجيبة هذه ، لا تناقض قانون اطراد الحركة المهم الذى نلمسه فى الطبيعة• فالنور يتحرك بسرعة تناهز الـ ١٩٠٫٠٠٠ ميل فى الثانية ويصلنا من الشمس فى مدة سبع او ثمان دقائق ورغما عن ذلك فالمسافة التى يقطعها هى على الدوام دالة مطردة للزمن • وليس من الواضح لنا بمثل هذه السهولة ، ان سرعة الجسم ، هى ايضا على الدوام ، دالة مطردة للزمن • ولننظر فى أمر القطار بعد أى زمن كان على بدء الحركة ، وليكن بعد ن من الساعات ، فنجد انه يتحرك بسرعة معينة ، نفرض انها س من الاميال فى الساعة • وان س هذه تكون صفرا عندما يكون القطار فى حالة الوقوف فى المحطة ، وتكون كمية سالبة عندما يتراجع القطار القهقرى • ولا شك فى اننا نعلم ، ان سرعة قطار ضخم ثقيل لا يمكن ان تتغير فجأة • فلا يمكن مثلا ، ان يكون القطار سائرا بسرعة (٤٠) ميلا فى الساعة منذ الساعة ١١/٤٥ الى الساعة ١٢/- ، ثم تصبح سرعته بغتة ، وبدون انقضاء لحظة زمنية مهما كانت صغيرة ، (٥٠) ميلا فى الساعة • ولابد لنا ان نعترف ، بأن تغير السرعة

حدث بصورة تدريجية ولكن بماذا نعلل السرع الناشئة عن التصادم ، اذا حدث بقوة كافية ؟ لنفرض ان قطارين اصطدما ، او لنأخذ شيئين أصغر منهما ، ولنفرض ان رجلا ركل كرة قدم ، فيخيل الينا كأن الكرة بدأت فجأة بالحركة ، أى ان حواسنا ، فى قضية السرعة ، لا تتمرد على عد السرعة دالة منقطعة للزمن ، كما تمردت على فكرة انتقال القطار من بلشلى الى ركبى فجأة وبغير زمن . والحقيقة ، ان قوانين الحركة ، بما فيها فكرة الكتلة ، ان كانت صحيحة ، فلا يوجد فى الطبيعة سرعة منقطعة (أى فجائية) . وكل ما يظهر لحواسنا من تبدل منقطع (أى فجائى) فى السرعة ، يجب ، بموجب هذه القوانين ، ان نعده حالة من حالات التبدل التدرجى ، ولكنه يحدث بسرعة أعجل من ان تدركها حواسنا . على انه من الحمق ان تندفع الى القول بانعدام الدوال المنقطعة فى الطبيعة عموما . ومثلنا فى ذلك ، كمثل الرجل الذى اعتمد ان متوسط الارتفاع عن سطح البحر ، بين لندن وباريس ، دالة مطردة للبعد عن لندن . فكان يسير ليلا وهو غارق فى تأملاته فى المجرة ، مقتربا من حافة الهاوية العميقة فى اطراف دوفر ، فلم يجد نفسه الا وهو يهوى ، ويتخطفه الموت قبل ان يستجمع افكاره ليدرك ضرورة التحفظ فى الاستنتاجات العلمية .

ومن السهل جدا ان نجد دالة منقطعة ، حتى لو قيدنا انفسنا بأبسط القوانين الجبرية . ولنأخذ على سبيل المثال ، الدالة $ص = \frac{1}{س}$ ، التى

سبق ونظرنا فيها ، وهي بالشكل ص = $\frac{1}{ح}$ وكانت قيم ح محصورة ضمن الكميات الموجبة فقط • اما الان فلنعط س أية قيمة موجبة كانت أم سالبة فنجد ان الخط البياني للدالة يصبح كما هو في الشكل - ٢١ • لنفرض



شكل (٢١)

ان س تتغير باطراد ، ابتداء من قيمة سالبة كبيرة ثم تصغر بالتدريج ، مارة بسلسلة من القيم السالبة ، حتى تصل الصفر وتتجاوزه الى سلسلة القيم الموجبة المتزايدة • فيكون تفسير ذلك بيانيا ان نقطة مثل د ، تمثل مقدار س على المحور س م سَ ، تتحرك على محور السينات ، مبتدأة

من اقصى اليسار ، ومارة على التوالى بالقيم $د_1$ ، $د_2$ ، $د_3$ ، $د_4$ ... الخ اما النقــاط على منحنى الدالة ، التى تناظر هــذه القيم فهى $ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$ ، $ن_4$ .... الخ ومن السهل ان نرى ان هناك نقطة انقطاع عندما تكون س = ٠ ، أى عند نقطة الاصل • فان قيمـة الـدالة فى الجهـة السالبة (اليســرى) تكبر الى ما لا نهاية له ، عند الاقتراب من نقطـة الاصل ، ولكنها تكون سالبــة • ثم تعود الدالة الى الظهور فى الجهـة الموجبة (اليمنى) ، ويكون مقدارها ، عند ظهورها ، لا نهاية له ولكنه موجب • وعلى ذلك فمهما كان طول المسافة بين $د_2$ ، $د_3$ قصيرا ، فلابد من وجود طفرة محدودة بين قيمة الدالة فى $د_2$ وقيمتها فى $د_3$ • ولهذه الحالة ، زيادة على ذلك خاصية اخرى ، وهى انه كلما صغر البعد بين $د_2$ ، $د_3$ ازدادت سعة الطفرة بين قيمتى الدالة بشــرط وقوع نقطـة الاصل بينهما • ويكشف الرسم البيانى عن ناحيـة أخرى ، مبينة فى الشكل ـ ٢٠ من هذا الفصل ، وهى ان الانقطاعات ، فى دوال كثيرة ، تقع فى نقاط متبـاعدة او منفصلة • ولكننا اذا حصرنا قيم السنـد فى حدود لا تقع ضمنهــا نقاط انقطاع ، كانت الدالة مطردة ، لجميع قيم السنــد الواقعـة ضمن هـذا النطاق • ففى الشكل ـ ٢١ يتضح لنا ان الدالة $ص = \frac{1}{س}$ ، دالة مطردة اذا لازمنــا القيم الموجبـة وحـدها ، واستثنينا نقطة الاصل • كذلك تكون الدالة نفسها مطردة ، اذا لازمنا القيم السالبة وحدها واستثنينا نقطة الاصل • اما الدالة المرسومة بيانيا فى

الشكل ٢٠ فهي مطردة فيما بين النقاط ب ، $ح_١$ ، وبين $ح_١$ ، $ح_٢$ ، وبين $ح_٢$ ، $ح_٣$ .... الخ ، على ان نستثنى نقطتى النهايتين فى كل حالة .
ومن السهل وجدان دالة تكون انقطاعاتها فى جميع النقاط . مثال ذلك ، لنأخذ الدالة د (س) التى تكون قيمتها واحدا [أى د (س) = ١] عندما تكون س أى عدد كسرى ، وتكون قيمتها اثنين [أى د (س) = ٢] عندما تكون س أى عدد لا قياسى Incommesurable فهذه الدالة منقطعة فى جميع نقاطها .

واخيرا ، لننظر بامعان اكثر فى تعريف الاطراد الذى ذكرناه اعلاه ، حيث قلنا ان الدالة تكون مطردة ، اذا تغيرت قيمتها بالتدريج بالتغير التدريجى لسندها ، وانها منقطعة اذا تغيرت قيمتها بطفرات فجائية . ان هذا النوع من التعريف ، الذى اقتنع بصحته السلف من الرياضيين ، لا يرضى الان الرياضيين الحديثين ، ويستأهل ان نخصص له شيئا من الوقت . لاننا اذا فهمنا الاعتراضات الحديثة عليه ، نكون قد قطعنا شوطا بعيدا نحو فهم الروح الحديثة فى الرياضيات . ان كل الفرق بين الرياضيات القديمة والحديثة ، يتمركز فى ان الاخيرة لا تجيز استعمال مصطلحات مبهمة او نصف مجازية Half-metaphorical مثل « تدريجيا » ، فى تعابيرها الدقيقة . ولكنها تعترف فقط ، بتلك النصوص والتعاريف والبراهين ، التى تقتصر على استعمال الفكر القليلة السهلة عن العدد والسعة والمتغيرات ، وهى الاسس التى بنى عليها العلم .
فاذا وجد عددان ، جاز ان يكون احدهما اكبر او اصغر من الثانى ،

او ان يكون اولهما كذا وكذا من مضاعفات الاخر • ولا توجد علاقة « تدرج » بين العددين ، ولهذا لا يسمح باستعمال هذه الكلمة • وقد يرى القارىء فى ذلك شيئا من التحذلق ، ولكن هذه التهمة تدفع بقولين• الاول منهما، ان عددا من كبار الرياضيين، وخاصة آبل Abel فى السويد و وايرستراس Weierstrass فى المانيا ، وجدوا فى النصف الاول من القرن التاسع عشر ، ان نصوص اقسام كثيرة من الرياضيات وضعت دون تبصر وبصورة لا أبالية ، واقل ما يقال فيها انها خطأ • ولقد قابل ماكولى ، فى مقال له عن بيكون ، بين التوثق والاتقان فى الرياضيات ، والشك وعدم التثبت فى الفلسفة • وكمثال بليغ على ذلك قال : « لم يحدث رد فعل ضد نظرية تيلور » • ولم يكن فى وسعه ، والحق يقال ، ان يتقدم بمثال أسوأ من هذا • ولا نعدو الصواب اذا قلنا ، ان الكتب الانكليزية فى الرياضيات ، التى عاصرت نشر هذا المقال، اوردت نص نظرية تيلور هذه والبرهان عليها بشكل خاطىء • وهذا القول لا يتطلب منا حتى فحص تلك الكتب • ان الحرص الشديد ، فى التعبير ، ضرورى للاتقان والضبط • اما الثانى منهما ، فهو ان الدقة من مستلزمات القيام بالبحث والاستقصاء ، وتعمل على جلاء الفكر وخصبه ، واقدامه على تجربة مزج مجموعات مبتكرة من الآراء • فاذا كانت النصوص البدئية غامضة وواهنة ، فلابد من الالتجاء الى سلامة الذوق فى كل مرحلة ، من مراحل التفكير التالية ، لوضع الحدود وتوضيح المقاصد • ولكن سلامة الذوق هذه ، سيد سيء لاغراض الابداع

العلمى ، لان ميزان الحكم عندها هى ان يكون للآراء الجديدة مظهر الآراء القديمة • وبتعبير آخر انها لا تعمل الا على طمس الابتكار وقهره •

وكيما نشق طريقنا نحو التعريف المحكم للاطراد، (كما يستخدم فى الدالة) ، دعنا ننظر بتمعن اكثر ، فى القول بانه لا توجد علاقة « تدرج » بين الاعداد • ورب سائل يقول ، الا يمكن ان يكون عدد اكبر بشىء زهيد من عدد آخر • او بكلمة أخرى ، الا يمكن ان يكون الفرق بين عددين صغيرا جدا ؟ ان كل ما فى الامر ، هو أنه لا يوجد فى المجردات ، باستثناء قليل من الحالات التطبيقية المفروضة بصورة كيفية ، ما يسمى عدد كبير او عدد صغير • فمليون ميل مثلا ، عدد صغير ، فى نظر الفلكى الباحث عن ابعاد النجوم الثابتة ، اما مليون دينار ، فتعد واردا سنويا ضخما • وصرف ربع الدخل فى اعمال البر ، يعتبر نسبة كبيرة ، ولكنه ، اذا ما اريد الاقتصار عليه فى النفقات الخاصة يعد كسرا صغيرا • ويوجد من الامثلة ما لا حصر له ، لبيان ان كلمتى كبير وصغير ، بأى معنى مطلق ، لا مجال لاستخدامها المجرد فى الاعداد • ولكنه فى الوسع ان نقول عن عددين ان احدهما اكبر او اصغر من الثانى • ولا يجوز لنا ان نقول عن عدد واحد انه كبير او صغير ، دون تحديد للظروف الخاصة به • فواجبنا اذن ان نعرف الاطراد دون ان نتطرق الى ذكر تبدل « صغير » او « تدريجى » فى قيمة الدالة •

وللوصول الى ذلك ، سنطلق أسماء على بعض الفكر التى ستفيدنا

أيضا ، عندما نتقدم للنظر فى موضوع (الغايات Limits) وحساب التفاضل Differential calculus .

عندما نقول « فترة »[1] قيم السند (س) فى الدالة د (س) ، نقصد بذلك ، جميع قيم السند (س) الواقعة بين قيمتين مفروضتين له . مثال ذلك ، ان الفترة بين س = ١ ، س = ٢ تتألف من جميع القيم التى يمكن أن تأخذها س ، والتى تقع بين ١ و ٢ . أى انها تتألف من جميع الاعداد الحقيقية بين ١ و ٢ . على أنه ليس من الضرورى أن يكون العددان المحددان للفترة ، عددين صحيحين . ويقال لفترة قيم السند انها « تحتوى » على العدد أ ، اذا كان أ من جملة القيم الواقعة ضمن حدود الفترة . مثال ذلك ، ان الفترة بين ١ و ٢ تحتوى على $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، ... الخ .

واذا قيل ان مجموعة من الاعداد تقترب من العدد أ ضمن المقياس ك ، فمعنى ذلك أن الفرق العددى بين أ وكل عدد من أعداد المجموعة يكون أقل من ك . مثال ذلك ، ان مجموعة الاعداد ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، تقترب من العدد ٥ ضمن المقياس ٤ . وفى هذه الحالة نجد أن المقياس ٤ ليس أقل عدد أمكن اختياره ، لان المجموعة تقترب من العدد ٥ ضمن أى من المقاييس ٣ر١ او ٣ر٠١ او ٣ر٠٠١ . كذلك نجد الاعداد ٣ر١ ، ٣ر١٤١ ، ٣ر١٤١٥ ، ٣ر١٤١٥٩ تقترب من ٣ر١٣١٠٢ ضمن المقياس ٠ر٠٣٢ او المقياس الاصغر ٠ر٠٣١٠٣ ايضا .

---

(1) Interval

ان هاتين الفكرتين ، الفترة والاقتراب من عدد ضمن مقياس ، فكرتان على شيء من السهولة . والصعوبة الوحيدة فيهما ، توهم انهما تافهتان . فهما اذا دمجتا بالفكرة التالية وهى فكرة « جوار » العدد ، تألف منها جميعا أسس التفكير الرياضى الحديث . فماذا نقصد ، اذا قلنا ان امرا ما ، فى دالة مثل د (س)، يكون صحيحا ، عندما تكون قيمة السند س فى جوار المقدار أ ؟ ان هذه الفكرة الاساسية هى التى يجب أن نحددها باتقان .

يقال لقيم دالة ، مثل د (س) ، انها تمتلك صفة خاصة فى « جوار أ » ، اذا أمكن ايجاد فترة بحيث (أولا) تحتوى على العدد أ ، على أن لايكون نقطة طرف لها[1] . و (ثانيا) أن تمتلك هذه الصفة الخاصة نفسها ، جميع قيم الدالة ، المناظرة لقيم السند الواقعة فى الفترة عدا التميمة أ . اما د (أ) ، وهى قيمة الدالة عندما تكون قيمة السند أ ، فيجوز أن تمتلك تلك الصفة الخاصة كما يجوز أن لاتمتلكها . ولا يبت فى هذا الامر عند الكلام عن القيم فى « جوار » أ .

مثال ذلك لو أخذنا الدالة الخاصة س٢ ، لامكننا القول ان قيم س٢ « فى جوار الـ ٢ » ، تكون أقل من ٥ . اذ فى وسعنا أن نجد فترة ما ، ولتكن من ، ١ الى ٢٫١ بحيث (اولا) تحتوى على العدد ٢ وهو ليس بنقطة طرف لها . و (ثانيا) ان س٢ أقل من ٥ لجميع قيم

(١) End point « المعرب » أى أن لا يكون العدد أ نقطة بدء الفترة أو نقطة انتهائها بل يكون فى مكان ما بين النهايتين .

س الواقعة فيها .

والان ، اذا استعنا بمجموعة الاراء السابقة ، نعرف ماهو المقصود من القول بأن الدالة د (س) ، تقترب في جوار أ ، من ح ، ضمن المقياس ك . فهو يعني ، ان في الامكان ايجاد فترة ما ، بحيث (اولا) تحتوي على أ على ان لاتكون أ نقطة طرف لها ، و (ثانيا) أن الفرق بين ج وبين أية قيمة من قيم الدالة د (س) ، المناظرة لاية قيمة من قيم س الواقعة في الفترة ، عدا القيمة أ ، يكون أقل من ك . مثال ذلك ، ان قيمة الدالة √س في جوار ٢ تقترب من ١٫٤١٤٢٥ ضمن المقياس ٠٫٠٠٠١ . وسبب صحة هذا القول ، أن الجذر التربيعي للمقدار ١٫٩٩٩٩٦١٦٤ هو١٫٤١٤٢ ، والجذر التربيعي للمقدار ٢٫٠٠٠٢٤٤٤٩ هو ١٫٤١٤٣ وعليه فجميع قيم س في الفترة من١٫٩٩٩٩٦١٦٤ الى٢٫٠٠٠٢٤٤٤٩ ، تجعل جميع قيم الدالة √س تقع بين ١٫٤١٤٢ و ١٫٤١٤٣ . وكل من هذه القيم تختلف عن ١٫٤١٤٢٥ بأقل من ٠٫٠٠٠١ . وفي هذه الحالة نستطيع ، ان أردنا ، تحديد مقياس للتقريب أصغر مما ذكرنا ، مثل ٠٫٠٠٠٠٥١ او ٠٫٠٠٠٠٠٥٠١ . واليك مثالا آخر في قولنا ان الدالة $س^٢$ في جوار ٢ ، تقترب من ٤ ضمن المقيـــاس ٠٫٥ . لان $(١٫٩)^٢$ = ٣٫٦١ و $(٢٫١)^٢$ = ٤٫٠٤١ وبهذا نكون قد وجدنا الفترة المطلوبة وهي من ١٫٩ الى ٢٫١ ، وتحتوي على ٢ ولكن لا كنقطة طرف لها . ان هذا المثال يبين لنا ، ان الكلام عن الدالة د (س) في جوار العدد أ ، يختلف عن الكلام عن قيمة الدالة د (س) عندما تكـون س = أ . اذ ان

المطلوب وجدان « فترة » تصح الخاصية خلالها . ومجرد أن $٢^٢$ = ٤ ، لايسوّغ بحد ذاته ، القول بأن الدالة $س^٢$ فى « جوار » ٢ تساوى ٤ . ان مثل هذا القول خطأ ، اذ لا يمكن وجدان فترة لها هذه الخاصية . وكذلك مجرد أن $٢^٢$ = ٤ لايبرر بحد ذاته أن نقول ان الدالة $س^٢$ فى جوار ٢ تقترب من ٤ ضمن المقياس ٥ر. رغم اننا بالحقيقة ، قد برهنا على صحة ذلك قبل قليل .

اذا كنا قد فهمنا هذه الآراءالتى سلفت ، نكون قد فهمنا أسس الرياضيات الحديثة . وسنعود الى آراء مماثلة لها ، فى الفصل الذى سنعقده عن المتسلسلات ، وفى الفصل عن حساب التفاضل . كما اصبحنا الآن على استعداد لتعريف الدوال المطردة .

يقال للدالة د (س) انها مطردة عند القيمة أ لسندها ، اذا كانت قيم الدالة فى جوار أ ، تقترب من د (أ) (أى من قيمتها عندما يكون السند مساويا أ) ، ضمن « أى مقياس كان » من مقاييس التقريب .

وتفسير ذلك أنه ، كيفما انتخبنا المقياس ك ، فان قيمة د (س) فى جوار أ ، تقترب من د (أ) ضمن المقياس ، ك . مثال ذلك ، ان $س^٢$ تكون مطردة عند القيمة ٢ للسند س ، لانه كيفما انتخبنا المقياس ك ، ففى الوسع ، دوما ، أن نجد فترة بحيث (أولا) تحتوى على ٢ لا كنقطة طرف لها و (ثانيا) ان جميع قيم $س^٢$ ، المناظرة لقيم السند الواقعة فى هذه الفترة ، تقترب من ٤ (أى $٢^٢$) ، ضمن المقياس ك . ولنفرض أننا انتخبنا المقياس ١ر. فان $(١ر٩٩٩)^٢$ = ٣ر٩٩٦٠٠١ و $(٢ر٠١)^٢$

= ٤٠٤٠١ر٤ وكل من هذين العددين يختلف عن الـ ٤ بمقدار أقل من ١ر٠ وعليه فنقول انه فى الفترة من ١٫٩٩٩ الى ٢٠٠١ر٢ تقترب قيم س^{٢} من ٤ ضمن المقياس ١ر٠ . وبالشكل نفسه ، يمكن وجدان فترة لاى مقياس نريد أن نجربه .

لنأخذ قطار السكة الحديد ، ، فان سرعته مطـردة عنـدما يمر بصندوق الاشارات . اذ مهما كانت السرعة التى نقررها (ولتكن واحد من مليون من الميل فى الساعة) ، ففى الامكان وجدان فترة زمنية ، تمتد من قبيل لحظة الاجتياز الى بعيدها ، بحيث أن سرعة القطار ، فى جميع اللحظات الواقعة فى هذه الفترة ، تختلف عن السرعة التى اجتاز بها القطار الصندوق بأقل من واحد من مليون من الميل فى السـاعـة . ويصدق هذا أيضا على مقدار السرعة التى نقررها مهما كان بدلا عن واحد من مليون من الميل فى الساعة .

الفصل الثانى عشر

الدورية فى الطبيعة

PERIODICITY IN NATURE

ان وجود الحوادث الدورية يسود حياة الطبيعة بأسرها • أى أنه توجد حوادث متالية ، تتشابه الى حد ، يمكن معه القول ، دون اجهاد للفكر ، بأنها تكرار لحادثة واحدة • فدورة الارض تولد تتالى الايام ، ومع أنه لايوجد شك فى أن كل يوم يختلف عن الايام السابقة له ، مهما حاولنا أن نجعل تعريف اليوم مجردا بحيث لا يشمل الظاهرات الطارئة ، فان التعريف هذا ، اذا كان على درجة كافية من التجرد ، يجعل التمييز بين خصائص يوم وآخر أمرا تافها ، وبعيدا عن المقتضيات العملية • ولذلك يجوز أن نتصور كل يوم بانه تكرر ظاهرة دورة واحدة للارض• ودوران الارض حول الشمس ، ينتج عنه التكرر السنوى للفصول ، ويفرض دورية أخرى على كافة أعمال الطبيعة • وتوجد دورية ثالثة، أقل شأنا ، وتتمثل فى أوجه القمر • وتعد هذه فى الحياة العصرية المتحضرة ، بأنوارها الصنعية ، تافهة القدر ، أما فى الازمنة القديمة ، وفى الاجواء التى يكون نهارها ملتهبا وسماؤها صحوا ، فقد تأثرت حياة الانسان كثيرا ، حسب الظاهر ، بوجود نور القمر • ولذلك ،

انتشر تقسيم السنة الى اسابيع وشهور وما يصحب ذلك من الامور الدينية ، بين الشعوب الاوربية ، مقتبسا عن سورية وما بين النهرين ، مع وجود معلومات مستقلة عن أوجه القمر لدى معظم الامم . وعلى كل، لم ينشأ أثر دورية القمر في تاريخ الارض ، عن أوجه القمر بنورها وظلامها ، بل كان للمد الأثر الرئيسي فيه .

ان حياتنا الجسدية دورية بجوهرها . فهي تخضع لضربات القلب وتكرار التنفس . وافتراض الدورية أساسي لادراكنا للحياة . فلا يمكن أن نتصور دورا من أدوار الطبيعة ، تتلاحق فيه الحوادث ، ولا نستطيع أن نقول عنه « ان هذا قد حدث قبلا » . ولولا ذلك لفقدنا قيمة التجارب كمرشد لنا في تصرفاتنا . فان الناس اذ ذاك يجدون أنفسهم ، على الدوام ، في حالات جديدة لم يسبق لهم أن خبروها ، اذ لا مثيل لها اطلاقا في التاريخ الماضي ؛ ولفقدنا أيضا ، حتى الوسائل التي نقيس بها الزمن كمقدار . ويجري التعرف بالحوادث اذذاك على أساس وقوعها بصورة متسلسلة فيكون بعضها أقدم أو أحدث مما سواه . أما الان فنحن نذهب الى ماهو أبعد من مجرد هذا التعرف ، فلا نكتفي بالقول ، مثلا ، ان الحوادث الثلاث أ ، ب ، ح حدثت بهذا الترتيب بحيث أن (أ) وقعت قبل (ب) و (ب) قبل (ح) بل نستطيع أن نقول أيضا أن طول الزمن بين الحادثتين أ ، ب هو ضعف طوله بين ب ، ح . ان تقدير كمية الزمن يعتمد ، بالضرورة ، على ملاحظة عدد الحوادث الطبيعية المتكررة التي تتخلله . فنقول مثلا ان طول الزمن بين أ ، ب كان كذا

وكذا من الايام أو الشهور أو السنين على حسب نوع التكرار الذى نريد أن نرجع اليه فى قياس الزمن • والحقيقة ، ان هذه الاساليب الثلاثة فى قياس الزمن ، كانت متمايزة عند بدء الحضارة • ولقد كان من أولى وجائب العلم بين الامم المتحضرة أو نصف المتحضرة ، ادماجها جميعا للحصول على مقياس واحد متماسك • ولكى نفهم مدى أهمية هـذا العمل ، يتحتم علينا أن لا نكتفى باقرار عدد الايام فى سنة من السنوات ، (٢٥٠٠ر٣٦٥ يوما مثلا)، بل ان نقرر مقدما، انهذا العدد نفسه من الايام، سيؤلف السنين المقبلة ايضا • اذ فى الوسع أن نتخيل عالما توجد فيه أمور دورية ولكن لايتطابق منها أى اثنين • كأن تكون بعض السنين مؤلفة من ٢٠٠ يوم واخرى من ٣٥٠ يوما • وان اقـرار وجـود التشابـه والاتساق ، بصورة واسعة عامة ، بين الدورات الاكثر أهمية ، كان الخطوة الاولى فى علم الطبيعة • وهذا الاتساق لم ينتج عن مقتضيات قانون فكرى مجرد يدرك بالبداهة ، ولكنه حقيقة ملحوظة فى الطبيعة تؤيدها الخبرة • والحق انه أبعد عن أن يكون قانونا ضروريا ، حتى أن صحته ليست تامة • اذ توجد انحرافات عنه فى كل حالة • ففى بعض هذه الحالات تلحظ هذه الانحرافات بسهولة ، ولذلك تتبين رأسا • أما فى الحالات الاخرى ، فتتطلب أدق الارصادوالضبط الفلكى للوقوف عليها • وبوجه عام ، نقول ان كافة الامور المتكـررة التى تتوقف على المخلوقات الحية ، مثل ضربات القلب ، تكون عرضة للتغـير السـريع ، بالمقارنة مع المتكررات الاخرى • أما المتكررات العظيمة الثابتة والظاهرة

للعيان – ثابتة بمعنى أنها تتفق فيما بينها الى درجة عظيمة من الدقة – فهى التى تتوقف على حركة الارض بأسرها وعلى حركات مماثلة للاجرام السماوية ٠

ولذلك نحن نفترض ان هذه المتكررات الفلكية تعين فترات متساوية من الزمن ٠ ولكن ماذا نصنع تجاه مابينها من التباين الذى تسجله الارصاد الفلكية الدقيقة ؟ يظهر أن علينا ان نعود الى الافتراض الكيفى ، من أن احدى مجموعات هذه الظاهرات الطبيعية يحدد أوقاتا متساوية فاما أن نقول مثلا ان جميع الايام ذات طول واحد أو أن السنين جميعا متساوية فى الطول ٠ ولكن الامر ليس كذلك : لابد اذاً من وضع بعض الفرضيات ،ولكن الفرضية الاساسية التى يقوم عليها اسلوب الفلكيين بأسره ، فى وجدان قياس للزمن ، هى تحقق قوانين الحركة بصورة تامة ٠ وقبل توضيح كيفية اجراء ذلك ، يكون من الممتع أن نلحظ أن الرجوع الى الفلكيين فى أمر وجدان ، مقياس للزمن ، نشأ (كما سبق أن قلنا) عن التناسق الثابت فى المتكررات التى يتعاملون بها، ولو وجد فى المتكررات الخاصة بالجسم الانسانى تناسق دقيق كهذا، لرجعنا طبعا ، الى دكاترة الطب فى ضبط ساعاتنا ٠

وعند النظر فى كيفية ادخال قوانين الحركة فى هذا الموضوع ، يجب الالتفات الى أن استعمال طرازين متعارضين فى قياس الزمن ، يؤدى الى نتيجتين مختلفتين فى تغيرات السرعة للجسم الواحد ٠ مثال ذلك لنفرض أننا عرّفنا الساعة الزمنية بأنها جزء واحد من أربعة

وعشرين جزءا من اليوم ، ولنأخذ حالة قطار يسير بسرعة منتظمة لمدة ساعتين ، بمعدل عشرين ميلا فى الساعة . والان لنأخذ مقياسا للزمن تتفاوت وحداته بشدة ، ولنفرض أنه يجعل طول الساعة الاولى ضعف طول الساعة الثانية ، فيكون على حسب مقياس الزمن الاخير هذا ، ان المسافة التى قطعها القطار تقسم الى قسمين ، قطع فى كل منها المسافة نفسها ، أى عشرين ميلا ، ولكن الوقت الذى مر عليه فى القسم الاول ضعف الوقت الذى قضاه فى القسم الثانى . وعلى ذلك فان سرعة القطار لم تكن منتظمة ، بل كان معدلها فى الفترة الثانية ضعف معدلها فى الفترة الاولى . وهكذا فان السؤال عما اذا كان القطار يسير بسرعة منتظمة أم لا ، يتوقف كليا على مقياس الزمن الذى نصطلح عليه .

وبالنسبة لكافة مقتضيات الحياة على الارض ، يمكن عد المتكررات الفلكية ، على تباينها ، متطابقة تماما . وبافتراضنا هذا التطابق ، وما يتبعه من افتراض السرع التى تمتلكها الاجسام ، وتغيرات السرع ، نجد زيادة على ذلك ، أن قوانين الحركة التى كانت موضع النظر أعلاه ، تكاد تتحقق بالتمام . ونقول (تكاد) بسبب بعض الظاهرات الفلكية . وعلى كل نجد من جهة اخرى ، أن فرض سرع متباينة قليلا لدورات الكواكب وحركات النجوم ، يجعل القوانين تتحقق بكل اتقان . وعليه نثبّت هذه الفرضية وبذلك نكون قد اتخذنا مقياسا للزمن ، يصح تعريفه بالرجوع الى الظاهرات الفلكية ، ولكنه لاينطبق على انتظام تكرر أى منها . ولكن هذا لاينفى الحقيقة الكبرى ، وهى أن جريان الزمن

منتظم ، الذى تبنى عليه آمور كثيرة ، هو نفسه يعتمد على ملاحظة الحوادث الدورية •

ان بعض الظاهرات الطبيعة التى تبان ، لدى النظرة السطحية ، أنها عرض طارىء أو أمر شاذ ، أو أن تكون بخلاف ذلك فتجرى على وتيرة واحدة ، ربما كانت متأتية عن تأثير بعيد للدورية • ولنأخذ مثلا على ذلك قاعدة الرنين[١] Resonance • ينشأ الرنين عندما يكون لمجموعتين من الحالات المترابطة دورية واحدة • فمن قوانين الحركة ، أن الاهتزازات الصغيرة لكل الأجسام ـ اذا تركت هذه الاجسام وشأنهاـ تجرى فى فترات زمنية معينة خاصة بكل جسم • فالخطار أى البندول ، الذى تكون خطرته صغيرة ، تكون ذبذباته ذات زمن معلوم • ويتوقف مقدار الزمن ، للذبذبة الواحدة ، على شكل الخطار وتوزع وزنه وطوله • اما الجسم الاكثر تعقيدا ، فيمكن أن يهتز بأشكال عدة • على أن للذبذبة فى كل من هذه الاشكال « دورة زمنية » خاصة يحددها شكل الاهتزاز • وتدعى هذه الدورات الزمنية او الفترات بالدورات « الحرة ». ففى الخطار، تكون الدورة الزمنية واحدة لكل من اهتزازاته، اما فى الجسر المعلق، فتكون متعددة • ويتضح ذلك فى الآلات الموسيقية، كوتر الكمان ، عندما تكون الدورات أو الفترات الزمنية لاهتزازاته من القواسم البسيطة لاطول دورة أو فترة فيه ـ أى أنه اذا كانت أطول

---

(١) المعرب ان كلمة رنين هنا تعنى اكثر من معناها اللغوى المقتصر على الصوت لانها تشمل الاستجابة للاهتزاز أو الذبذبة •

دورة ن من الثوانى فان الدورات الاخرى تكون $\frac{1}{2}$ ن ، $\frac{1}{3}$ ن .... الخ .
ويجوز أن لاتظهر واحدة أو اكثر من هذه الدورات الصغرى . والآن
لنفرض أننا أثرنا اهتزازات فى جسم ، بواسطة مسبب دورى بذاته
فاذا كانت دورة المسبب تساوى ، على وجه التقريب ، احدى دورات
الجسم ، فان ذلك النوع من الاهتزاز فى الجسم يتقوى بشدة ، حتى
اذا كان مقدار السبب المؤثر صغيرا . هذه الظاهرة تسمى الرنين . ويمكن
ادراك العلة العامة لذلك بسهولة . فكل من يريد أن يقلب صخرة
مقلقلة ، يجب أن يجعل دفعه « وفق » اهتزازات الصخرة ، حتى تحين
اللحظة المؤاتية للدفعة الاخيرة . أما اذا لم يكن دفعه بالتوافق مع
الاهتزاز ، فان بعض الدفع يوسع الاهتزازات والبعض الآخر يعيقها .
ان كلمة Resonance رنين تأتى فى اثناء بحث الصوت ، ولكن
الظاهرة تتسع الى أمور تقع بعيدا خارج نطاق الصوت . فقوانين
امتصاص النور واشعاعه تعتمد عليها ، وكذلك توفيق جهاز استقبال
اللاسلكى (أى تهيئته للاستجابة للموجات اللاسلكية التى تلقى عليه) ،
والاهمية النسبية لتأثير الكواكب السيارة على حركات بعضها البعض ،
والخطر الذى يهدد الجسر المعلق اذا سار عليه جيش من الجند
بالخطوات العسكرية المتزنة الموقوتة ، والاهتزازات العنيفة التى تحدث
فى بعض انواع السفن بنتيجة الايقاع المنظم لآلاتها عندما تبلغ سرعة
السفينة مقادير معينة . وهذا التطابق فى الدوريات Periodicities
قد يحدث ظاهرات مستقرة اذا كان الاقتران بين حادثتين دوريتين ثابتا

مستقرا أو قد يولد اندفاعات عنيفة فجائية اذا كان الاقتـران صدفـة عارضة وأمرا موقتا .

وعدى عن ذلك ، فالدورات « اى المدد » الثابتة المذكورة أعلاه ، والخاصة بالاهتزاز ، هى علة مايظهر لنا كتنبيه ثابت مستمر لحواسنا . فقد نشغل لمدة ساعات على ضوء ثابت مستمر ، وننصت الى صوت ثابت مستمر لايتغير ، ولكن ، اذا كان العلم الحديث صحيحا ، فلا مثيل لهذا الثبات المستمر فى الطبيعة . فالنور الثابت ناشىء عن عدد لايحصى من الموجات الدورية ، فى أثير متموج ، تصطدم بالعين . واما الصوت فينشأ عن موجات متماثلة فى هواء متموج . لقد قلنا ما فيه الكفاية، لبيان ان اولى الخطوات الضرورية لجعل الرياضيات أداة صالحة لاستقراء الطبيعة ، هو أن تكون قادرة على التعبير عن الدورية الاساسية فى الاشياء . فاذا فهمنا ذلك ، نستطيع أن ندرك أهمية الافكار الرياضية التى نتطرق اليها وهى الدوال الدورية .

الفصل الثالث عشر

عِلم المُثَلْثات

TRIGONOMETRY

لم ينبعث علم المثلثات عن النظر العام فى دورية الطبيعة ، وبذلك كان تاريخه يماثل تاريخ القطوع المخروطية ، التى ترجع بأصلها هى أيضا الى آراء خاصة جدا • وفى المقارنة بين تاريخى هذين العلمين ، وما بينهما من تشابه وتباين ، فائدة تعليمية كبيرة • ان علم المثلثات ، كالقطوع المخروطية يعـود بأصلـه الى الاغـريق ، والذى اختـرعه يدعى هپاركـوس Hipparchus (المولود فى حدود عام ١٦٠ ق • م •) • وهو فلكى يونانى كان يقوم بارصاده فى جزيرة رودس ،وله خدمات جليلة لعلم الفلك • فهو الذى جعله موضوعا علميا حقا ، كما توصل فيه الى نتائج ذات أهمية ، ورسم طريقا لتقدمه • ولعل اختراعه علم المثلثات ، لم يكن أقل خدماته شأنا لموضوعه العلمى الاصلى • ثم جاء بطليموس الفلكى الاسكندرى العظيم الذى سبق ذكره ، وهو الرجل الثانى الذى وسع علم المثلثات • وهنا نشاهد من فورنا ، التباين بين القطوع المخروطية وعلم

المثلثات . فأصل علم المثلثات عملي واختراعه حدث بحكم ضرورته للابحاث الفلكية أما أصل القطوع المخروطية فنظرى بحت وكان مافى البحث من متعة فكرية هو السبب الوحيد للبدء بدراستها . وتمتاز القطوع المخروطية بان اختراعها وقع قبل اختراع علم المثلثات ب ١٥٠ سنة ، أى فى أخصب أدوار الفكر الاغريقى . أما أهمية المثلثات فى الرياضيات النظرية والتطبيقية ، فهى حالة واحدة من حالات لا عداد لها ، عن الآراء المثمرة التى اكتسبها العلم العام من التطبيقات العملية.

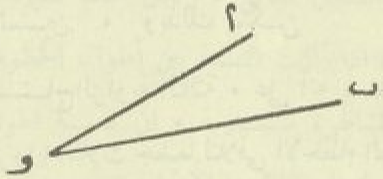
سنحاول الان ان نبين ما هى المثلثات ، وكيف انبثقت عن الدراسة العلمية لاحوال الفلك . ولنسأل اولا ما القياسات التى يقوم بها الفلكى ؟ والجواب عن ذلك انه يقوم بقياسات للزمن وقياسات للزوايا . فالفلكى يقدر أن يحكم وضع مقرابه[(١)] (اذ من الاسهل علينا أن نتكلم عن الآلة المعروفة لدى الفلكيين الحديثين) بحيث لا يدور الا حول محور ثابت يشير الى الشرق والغرب ، وتكون النتيجة أن امتداد المقراب يشير نحو الجنوب فقط ، مع امكان تدويره رفعا او خفضا . فاذا ادار المقراب حتى تجاوز سمت الرأس ، فهو يشير اذذاك الى الشمال . وهذه هى آلة الترانسيت (أى المرقبة)[(٢)]؛ تلك الآلة العظيمة التى تقيس بدقة الاوقات التى تكون فيها النجوم فى وجهة الجنوب أم فى وجهة الشمال . ولكن هذه الآلة

---

(١) Telescope

(٢) Transit وهى آلة لمراقبة وقت اجتياز الاجرام السماوية لدائرة نصف النهار للمحل الذى هى فيه ويجوز ان تسمى المزولة أيضا .

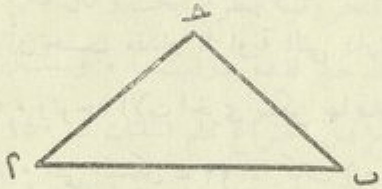
تقيس الزوايا بصورة غير مباشرة • اذ بمعرفتنا الزمن المار بين اجتياز نجمين لدائرة نصف النهار ، وعلى فرض أن الارض تدور بانتظام ، يمكننا أن نحسب مقدار الزاوية التى دارتها الارض فى تلك الفترة الزمنية • وتوجد آلات اخرى يمكن بها قياس الزاوية بين نجمين بصورة مباشرة • ففى الشكل — ٢٢ اذا كانت (و) عين الراصد ، وكان أ ، ب الاتجاهين اللذين يقع عليهما النجمان، فمن السهل ابتكار وسائل نقيس بها الزاوية أ و ب • فالفلكى الذى يشتغل بالقياسات السماوية



شكل (٢٢)

(مسح السماء) يقوم بالحقيقة بقياس الزوايا ، لتثبيت الاتجاهات النسبية للنجوم والكواكب السيارة فى أية لحظة • أما فيما يماثل هذه القضية عند مسح الارض فقياس الزوايا ايضا يؤلف الموضوع الرئيسى فيه ، لان القياس المباشر للطول لا يكون على درجة وافية من الدقة الا نادرا فالانهار والبيوت والغابات والجبال والعوارض الارضية العامة، تحول دون ذلك • ومسح مقاطعة عظيمة بأسرها يعتمد على قياس طول خط واحد ، او خطين ، بعناية فائقة وفى أماكن مختارة مثل سهل سالسبورى • لان العمل الاساسى فى المسح هو قياس الزوايا • مثال ذلك اذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط بارزة « ولتكن قمم أبراج كنائس » فى مقاطعة يراد مسحها ، فمن السهل أن نقيس فى أ الزاوية ب أ حـ ، وفى ب

الزاوية أ ب حـ وفى حـ الزاوية ب حـ أ • اما من الوجهة النظرية فيكفى ان نقيس زاويتين فقط من هذه الزوايا • اذ على حسب نظرية مشهورة فى الهندسة ، يساوى مجمـوع زوايا المثلث زاويتين قائمتـين • وبذلك يمكـن



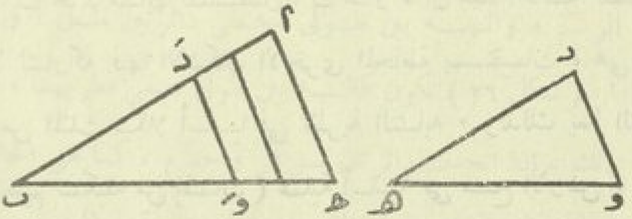
شكل (٢٣)

استنتـاج الزاوية الثالثة • على أنه يستحسن ، فى التطبيق العملى ، قياس الزوايا الثلاث جميعا لتلافى الاخطاء الصغيرة التى قد تحدث • وفى عمل الخرائط ، تغطى المقاطعة بأسرها بمثلثات من هذا القبيل • وتسمى هذه عملية التثليث[1] وهى عملية أساسية فى مسح الارض •

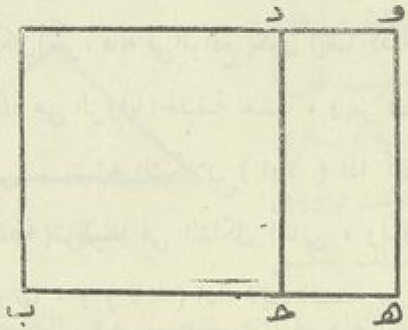
ان المثلث اذا عرفت زواياه جميعا ، تعرف هيئته — والهيئـة غير السعة • وهذا يؤدينا الى مبدأ التشابه الهندسى المهم ، وهو فكرة مألوفة وشائعة فى التطبيقات العملية • فقد ألفنا جميعا مشاهدة رسوم مرسومة بمقياس معلوم • فاذا كان مقياس الرسم انجا واحدا للياردة الواحد ، فان طول ثلاث انجات فى الرسم يعنى ثلاث ياردات فى الاصل • ولكن الهيئة المبينة بالرسم هى هيئة الاصل نفسه • فالزاوية القائمة فى الاصل تظهر قائمة فى الرسم ايضا • وتكون نسب الاطوال فى الخريطة ، وهى ليست سوى رسم لمقاطعة من الاراضى ، مساوية لنسب الابعاد بين الاماكن المناظرة لها • كما تكون الاتجاهات فى الخريطـة كالاتجاهـات على

(١) التثليث — تقسيم الارض الى مثلثات •

الارض • مثال ذلك اذا كان مكان ما على الخريطة ، يقع فى شمال ـ شمال ـ غرب مكان آخر ، فانه فى الواقع يكون ايضا كذلك وبقول آخر ان الزوايا فى الخريطة هى الزوايا الحقيقية نفسها • ويعرّف التشابه الهندسى على الوجه الآتى ـ يتشابه الشكلان (اولا) اذا كان لكل نقطة فى الشكل الاول نقطة تناظرها فى الشكل الثانى ، ولكل خط نظيره ، ولكل زاوية نظيرتها • و (ثانيا) اذا كانت النسبة بين أطوال الخطوط المتناظرة ثابتة ومقادير الزوايا المتناظرة متساوية • ان نسبة اطوال الخطوط فى خريطة ما (او رسم) الى نظائرها الاصلية تسمى مقياس الخريطة (او الرسم) • ويجب أن يشار الى هذا المقياس دوما على هامش الخريطة أو الرسم • لقد سبقت لنا الاشارة الى ان المثلثين يتشابهان اذا ساوت زوايا الاول نظائرها فى الثانى • وعليه فى المثلثين أ ب حـ ، د هـ و اذا كانت الزواية فى أ تساوى الزاوية فى د ، والزاويتان فى ب ، حـ تساويان الزاويتين فى هـ ، و كانت نسبة د هـ الى أ ب



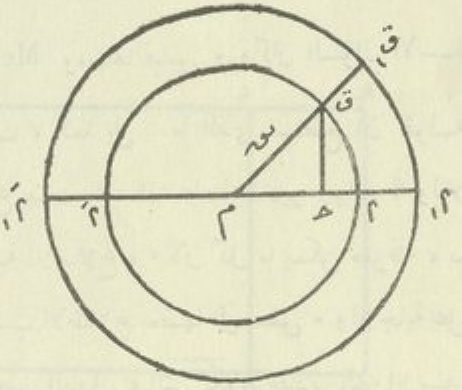
شكل (٢٤)



شكل (٢٥)

كنسبة هـ و الى ب ح ، وكنسبة و د الى ح أ . اما فى الاشكال الاخرى فمجرد تساوى الزوايا ، لا يضمن وحده تشابه الشكلين . ففى الشكل ٢٥ اذا كان أ ب ح د مربعا ، أ ب هـ و مستطيلا ، فان الزوايا المتناظرة ، جميعا ، متساوية . ومع أن أ ب ، الذى هو ضلع المربع يساوى أ ب الذى هو ضلع المستطيل ، فان الضلع ب ح من المربع ، يقرب من ثلثى طول ضلع المستطيل ب هـ وعليه لا يصح أن يكون المربع أ ب ح د مشابها للمستطيل أ ب هـ و . ان هذه الخاصية للمثلث ، التى لا تشاركه فيها الاشكال الاخرى المحاطة بمستقيمات ، هى التى تجعل من المثلث شكلا أساسيا فى نظرية التشابه . ولذلك يعد التثليث (أى تنظيم تشكيله من المثلثات) عملية أساسية فى مسح الارض . ومن هذه العملية اشتقت كلمة Trigonometry أى قياس المثلثات ، فهى مؤلفة من كلمتين اغريقيتين الاولى Trigonom ومعناها المثلث ،

والثانية Metria ومعناها قياس • وكان السؤال الاساسي الذى قام عليه علم المثلثات ، كما يلى : ما الذى نستطيع أن نقوله عن المقادير النسبية لاضلاع مثلث ما ، اذا علمنا مقادير زواياه ؟ وليلاحظ أنا قلنا « المقادير النسبية للاضلاع » ، لان كل ما يمكن معرفته ، بموجب نظرية التشابه ، هو نسب الاضلاع بعضها الى بعض • وللاجابة على هذا السؤال يقتضى ايراد بعض الدوال ، التى تكون مقادير الزوايا سندا لها • وكان قد تم الوصول الى هذه الدوال ، فى الاصل ، عن طريق النظر فى المثلث القائم الزاوية ، وعلى أساس تعريف مقدار الزاوية ، بطول قوس دائرة • أما الكتب الاولية الحديثة فقد أهملت ، الى حدما ، ما لقوس الدائرة من أهمية أساسية فى تعريف مقدار الزاوية ، الامر الذى لم يكن فى مصلحة النظرية أو سهولة التوضيح وجلائه • ومما تجب ملاحظته حول التشابه ، أن الدائرة تحتل بين الاشكال المنحنية (أو المقوسة) نفس الموقع الاساسى الذى يحتله المثلث بين الاشكال التى تحيط بها مستقيمات • فكل دائرتين متشابهتان ، والفرق الوحيد بينهما ، يكون بمقياس الرسم • والنسبة بين طولى محيطى دائرتين مثل أ ق آ ، $أ_1$ $ق_1$ $آ_1$ (شكل ٢٦) تكون كالنسبة بين طولى نصفى قطريهما ، وبالاضافة الى ذلك ، اذا اتحدت دائرتان بمركز واحد م ، كما هى الحال فى الشكل ٢٦ ، فالنسبة بين طولى القوسين أ ق ، $أ_1$ $ق_1$ المحصورين بين ضلعى أية زاوية مثل أ م ق ، تساوى النسبة بين نصفى القطرين •



شكل (٢٦)

وعليه تكون نسبة طول القوس أ ق الى طـول نصف القطـر م ق ، أى $\frac{\text{القوس ا ق}}{\text{نصف القطر م ق}}$ ، وهو عدد لا علاقة له البتة بالطول م ق ، مساويا للكسر $\frac{\text{القوس ا}_1\text{ ق}_1}{\text{نصف القطر م ق}_1}$. والكسر هـذا أى « القـوس مقسوما على نصف القطر » ، هو الطريقة النظرية الصحيحة لقياس مقدار الزاوية ، لأنه لا يعتمد على وحدة كيفية للطول ، ولا على طريقة تقسيم كيفى لزاوية مفروضة بصورة كيفية كالزاويـة القائمـة . فالكسـر $\frac{\text{ا ق}}{\text{م ق}}$ يمثل اذاً ، مقدار الزاوية أ م ق . والآن لنرسم ق حـ عموديا على م أ . فنحصل على الخط ق حـ الذى سماه رياضيو الاغريق جيب القوس أ ق ، وعلى الخط م حـ الذى دعوه جيب تمام القوس أ ق . ومع أنهم كانوا على علم تام بأن العلاقات بين هذه الخطوط المختلفة ،

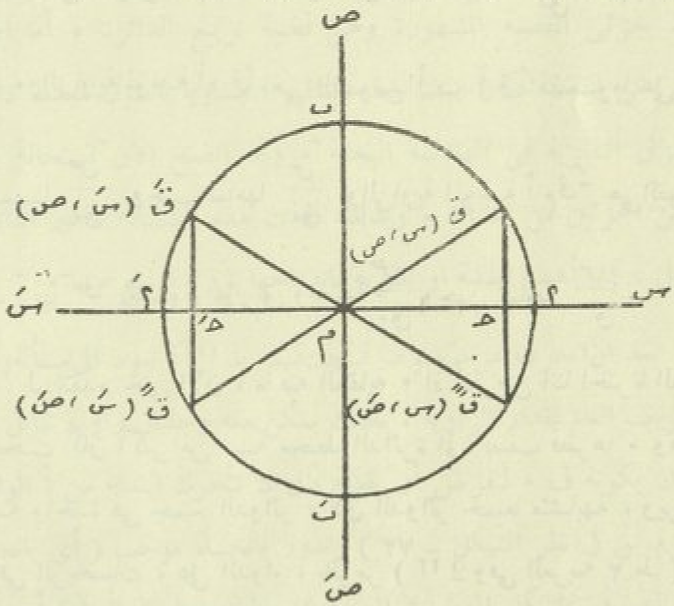
تعتمد على نظرية التشابه ، التى شرحناها ، فهم لم يضعوا تعاريفهم بحيث تعبر عن الخواص التى تنشأ عن هذه النظرية ولم يدر فى خلدهم أيضا ، شي عن الاراء العامة الحديثة المتعلقة بالدوال ، وأنها ارتباط بين اعداد متغيرة • كما لم يكونوا على علم بالافكار الحديثة فى الجبر والتحليل الجبرى • ولذلك كان من الطبيعى أن يقصروا تفكيرهم على العلاقات بين خطوط معينه ، تقع ضمن الاشكال الهندسية • أما بالنسبة لنا فالامر على خلاف ذلك ، فنحن نريده أن يتضمن من آرائنا ما هو أكثر أهمية وقوة •

لانهتم فى الرياضيات الحديثة بالقوس أ ق ، بل نأخذ بنظر الاعتبار ، بدلا عنه الكسر ، $\frac{\text{ا ق}}{\text{م ق}}$ وهو عدد لا يتغير مهما كان طول نصف القطر م ق • كما نأخذ الكسرين $\frac{\text{ق حـ}}{\text{م ق}}$ و $\frac{\text{م حـ}}{\text{م ق}}$ وهى أيضا أعداد لاتعتمد فى قيمها على م ق ، بدلا عن الخطين ق حـ ، م حـ ونعرف العدد $\frac{\text{ق حـ}}{\text{م ق}}$ بأنه جيب العدد $\frac{\text{ق ا}}{\text{م ق}}$ ، والعدد $\frac{\text{م حـ}}{\text{م ق}}$ بأنه جيب تمام العدد $\frac{\text{ق ا}}{\text{م ق}}$ • ولما كانت هذه الصور الكسرية مربكة عند الطباعة ، عوضنا عن الكسر $\frac{\text{ا ق}}{\text{م ق}}$ بالمقدار ف وهو يمثل مقدار الزاوية أ م ق ، وعوضنا عن الكسر $\frac{\text{ق حـ}}{\text{م ق}}$

بالمقدار ش ، وعن الكسر م حـ/م ق بالمقدار ع . فينتج عن ذلك أن كلا من ف ، ش ، ع ، عدد من الاعداد . وبما اننا نتكلم عن « أية » زاوية كانت ، يقتضى اذاً ، ان تكون الاعداد هذه متغيرة ، مع وجود علاقة فيما بين قيمها . فاذا عرف ف (وهو مقدار الزاوية أ م ق) ، تتعين قيمة كل من ش ، ع . ولذا يعد كلا من ش ، ع دالة للسند ف . وقد سبق لنا ان أسمينا ش ، جيب (ف) و (ع) جيب تمام ف . والان يحسن بنا أن نطبق الرمز العام للدالة ص = د (س) على هذه الحالات الخاصة . وللتوصل الى ذلك اصطلحوا ، فى الرياضيات الحديثة ، على استعمال (جا) بدلا من « د » عندما يراد يراد الاشارة الى دالة الجيب الخاصة ، ووضع « جتا » بدلا من « د » عندما يشار الى دالة جيب التمام الخاصة . وعلى ذلك ، وبموجب المعانى التى سبق واعطيناها لكل من ف ، ش ، ع ، يكون ش = جا ف ، ع = جتا ف . وبهذا ، نكون قد حذفنا الاقواس المحيطة بـ (س) فى الرمز د (س) ، ووضعنا بدلها الدوال الخاصة . اما معنى الدالة جا ، جتا ، بوصفها رابطة بين زوجى العددين (ف ، ش) ، (ف ، ع) ، فيتضح عند معرفة العلاقات الدالية وذلك بأن نرسم زاوية مثل أ م ق (راجع الشكل – ٢٦) ، فيكون ف مساويا الى قياس الزاوية الحاصل من « قسمة أ ق على م ق » ، اما العدد ش فينتج من قسمة « ق حـ على م ق » والعدد ع يحصل من قسمة « م حـ على م ق » .

ومن الواضح أننا ، اذا لم نتقدم بتعاريف جديدة أخرى ، سنجابه

صعوبات عندما يكون العدد ف أكبر مما ينبغى • اذ من الجائز أن يكون القوس أ ق أكبر من ربع محيط دائرة ، فتقع النقطة ح (راجع الشكلين ٢٦ – ٢٧) بين م ، اَ وليس بين م أ كما يمكن أن تقع النقطة ق أسفل الخط أ م اَ وليس أعلاه كما هى الحالة فى الشكل – ٢٦ • وللتغلب على هذه الصعوبة ، نرجع الى آراء الهندسة الاحداثية ومصطلحاتها ، لصوغ التعاريف الكاملة للجيب وجيب التمام • فنجعل أحد ضلعى الزاوية ، وليكن م أ ، محورا للسينات ، ونمده الى الوراء لنحصل على الجزء السالب له ، وهو م سَ • ونرسم ، بعد ذلك ، المحور الآخر ص م صَ عمودا عليه • ونفرض أن س ، ص هما احداثيا أية نقطة



شكل (٢٧)

مثل ق ، تبعد عن م بمقدار نق • فهذان الاحداثيان يكونان موجبين فى الربع الاول من المستوى ، كالاحداثيين س ، ص للنقطة ق فى الشكل **٢٧** • اما فى الارباع الاخرى فيكون أحد الاحداثيين أو كلاهما سالبا مثل س′ ، ص للنقطة ق′ ؛ س″ ، ص″ للنقطة ق″ ؛ س‴ ، ص‴ للنقطة ق‴ كما ترى ذلك فى الشكل **٢٧** ، وفيه كل من س‴ ، ص‴ أعداد سالبة • ثم نقول أن الزاوية الموجبة ق م أ هى القوس أ ق مقسوما على نق وجيبها ص/نق وجيب تمامها س/نق • والزاوية الموجبة أ م ق′ هى القوس أ ب ق′ مقسوما على نق وجيبها ص/نق وجيب تمامها س′/نق • والزاوية الموجبة أ م ق″ هى القوس أ ب آ ق″ مقسوما على نق وجيبها ص″/نق وجيب تمامها س″/نق والزاوية الموجبة أ م ق‴ هى القوس أ ب آ ب′ ق‴ مقسوما على نق وجيبها ص‴/نق وجيب تمامها س‴/ق •

لم نتقدم حتى الان ، ما فيه الكفاية • اذ لنفرض اننا اخترنا العدد ف بحيث كان أكبر من نسبة محيط الدائرة الى نصف قطرها • وهذه النسبة واحدة فى جميع الدوائر ، لان الدوائر جميعا متشابهة ، ويرمز لها فى الرياضيات ، على الدوام ، بالرمز (2π وفى العربية **٢** ط) • و π هى الصيغة الاغريقية للحرف اللاتينى P وتسمى فى الحروف

الهجائية الاغريقية (پای PI) • وفی الامكان البرهنة على أن Π او ط عدد غير قياسى ولذلك لايمكن التعبير عن قيمتها بكسر اعتيادى أيا كان ولا بكسر عشرى منته ولا دورى • اما قيمتها لبضع أرقام عشرية فهى ٣٫١٤١٥٩ ، وفى الكثير من المقاصد يكفى استعمال القيمة التقريبية $\frac{٢٢}{٧}$ ، على أن فى وسع الرياضيين استخراج قيمة ط بسهولة الى الدرجة التى تراد من الدقة، كما يستخرجون $\sqrt[٧]{٣}$ • والواقع أنهم وصلوا فعلا الى ٧٠٧ أرقام بعد الفاصل العشرى وكان الدافع ، الى هذا التعمق الشاق فى حسابها، حب الاستطلاع • اذ لافائدة نظرية او عملية تجنى من وراء ذلك • ان وجدان الـ ط بصورة دقيقة كان أحد جزئى القضية المشهورة وهى قضية تربيع الدائرة • أما الجزء الثانى من القضية فكان رسم خط مستقيم ، مساويا بالطول لمحيط دائرة بالطرق النظرية فى الهندسة البحتة • وقد اتضح الان استحالة حل هذين الجزئين من المسألة • وبذلك فقدت هذه المسألة ، غير القابلة للحل ، كل أهمية عملية او نظرية باندماجها بآراء اوسع منها •

بعد ان انحرفنا عن موضوعنا لنبحث قيمة ط (Π) نعود الى مسألة وضع التعريف العام لمقدار الزاوية ، بحيث يمكن معه وجدان زاوية تقابل أى مقدار يكونه ف • لنفرض أن نقطة مثل ك تتحرك ابتداء من أ الواقعة على م س (انظر الشكل ــ ٢٧) وتدور باتجاه موجب (أى باتجاه عكساعى فى الشكل الموضوع البحث) حول محيط الدائرة ، أى عدد

كان من الدورات ثم تستقر أخيرا فى أية نقطة مثل ق أو قَ أو قً او قٌ • فيكون طول المنحنى الدائرى ، الذى قطعته النقطة فى سيرها ، بجملته ، مقسوما على نصف قطر الدائرة نق ، هو التعريف العام للزاوية الموجبة مهما كانت سعتها • ولنفرض أن (س ، ص) هما احداثيا الموقع الذى تستقر فيه ك ، وأعنى ، أحد المواقع الاربعة التى أشرنا اليها فى الشكل **٢٧** • كما أن (س ، ص) (كما استعملناها هنا) تكون اما (س ، ص) أو (سَ ، ص) أو (سَ ، صَ) أو (س ، صَ)

وبذلك يكون جيب هذه الزاوية العامة $\frac{ص}{نق}$ وجيب تمامها $\frac{س}{نق}$ على ان لا ننسى الاشارة التى يجب أن تسبق س أو ص بالنسبة لمواقعها • وبهذه التعاريف نكون قد توصلنا أخيرا الى تعيين العلاقات الدالية ش = جا ف ، ع = جتا ف • اما فيما يتعلق بالقيم السالبة لـ ف فيتم ذلك بمجرد دوران ك باتجاه معاكس (أى باتجاه ساعىّ) • وبعد أن أوضحنا أساليب التعامل العامة ، حول هذه النقطة ، لم تبق حاجة الى اعطاء تفاصيل أكثر من ذلك عنها •

ان دالتى الجيب وجيب التمام ، كما عرفناهما سيجعلان فى وسعنا التعامل بالقضايا المتعلقة بالمثلث والتى انبعث عنها نشوء علم المثلثات • ونحن الان فى وضع نستطيع معه أن نصل علم المثلثات ، بفكرة الدورية الاوسع منه والتى أوضحنا أهميتها فى الفصل السابق • ومن السهل أن نرى أن الدالتين جاف و جتاف دالتان دوريتان لـ ف • واذا تأملنا الموقع فى

(فى الشكل ـ ٢٧) ، للنقطة المتحركة ك ، التى ابتدأت حركتها من أ ودارت حول الدائرة ، نجد أن هذا الموقع ق يبين الزوايا الاتية

$$\frac{\text{القوس أق}}{\text{نق}} ، ٢\text{ط} + \frac{\text{القوس أق}}{\text{نق}} ، ٤\text{ط} + \frac{\text{القوس أق}}{\text{نق}} ، ٦\text{ط} + \frac{\text{القوس أق}}{\text{نق}}$$

وهكذا الى ما حد لـه • الا ان لهـذه الزوايـا جميعهـا الجيب وجيب التمام نفسيهما وأعنى بهما $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ وهكذا أصبح من الهين أن ندرك أنه ، مهما كانت القيمة التى نختارها لـ ف ، تكون جميع قيم الجيوب المناظرة الاسناد ف ، ٢ ط + ف ، ٤ ط + ف ، ٦ ط + ف ، ٨ ط + ف، وهكذا الى ما لا حد له ، متساوية وكذلك تكون جيوب التمام • وبتعبير آخر يكون :

جاف = جا (٢ ط + ف) = جا (٤ ط + ف) = جا (٦ ط + ف) •••••• الخ

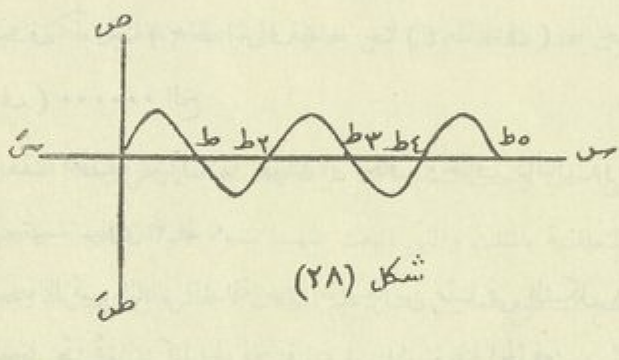
جتاف = جتا (٢ ط + ف) = جتا (٤ ط + ف) = جتا (٦ ط + ف) •••••• الخ

وهذه الحقيقة نعبر عنها بقولنا ان جاف وجتاف دالتان دوريتان وأن دورتهما تساوى ٢ ط •

تجد الرسم البيانى للدالة ص = جا س مبينا فى الشكل ٢٨ • (وليلاحظ هنا أننا تركنا الحرفين ف ، ش واستعملنا الحرفين س ، ص المألوفين اكثرمنهما) • أما طريقة عمل الرسم هذا ، فهى أن نأخذ على

محور السينات طولا كيفيا مناسبا يمثل العدد ط ، وعلى محور الصادات طولا كيفيا مناسبا يمثل العدد ١ ، لان قيم الجيب وجيب التمام لايمكن أن تتعدى الوحدة بتاتا ، ثم نلاحظ تكرر الشكل بعد كل دورة مقدارها ٢ ط • وهذا الرسم يمثل أبسط أنواع الدوال الدورية التى تبنى عليها جميع الدوال الاخرى • أما الرسم البيانى لجيب التمام فلا يختلف بشىء جوهرى عن رسم الجيب • فمن السهل أن نبرهن على أن جتا س = جا (س + ط/٢) • ولذلك يكون الرسم البيانى لجتا س هو الشكل ـ ٢٨ نفسه مع اجراء تحوير بسيط فيه ، وهو أن يمر محور الصادات بالنقطة ط/٢ الواقعة على محور السينات بدلا من رسمه فى موقعه الفعلى الذى يظهر به فى الشكل •

وليس من الصعب أن نرسم دالة جيب تكون دورتها أية قيمة



شكل (٢٨)

نحددها ولتكن أ • ويتم ذلك بمجرد كتابة ص = جا (٢ ط س / أ) •

ثم نقول :

$$\text{جا} \frac{2 \text{ط} (\text{س} + \text{أ})}{\text{أ}} = \text{جا} \left\{ \frac{2 \text{ط س}}{\text{أ}} + 2 \text{ط} \right\} = \text{جا} \frac{2 \text{ط س}}{\text{أ}}$$

وعليه تكون أ هى دورة هذه الدالة الجديدة .

لنتقدم الان الى ذكر التعريف العام لما نقصده بقولنا دالة دورية .
يقال للدالة د (س) انها دورية ، وان مقدار دورتها أ ، اذا (اولا) كانت د (س) = د (س + أ) لكل قيمة من قيم س و (ثانيا) لا يوجد عدد مثل ب أصغر من أ بحيث تكون د (س) = د (س + ب) لكل قيمة ، من قيم س .

والفقرة الثانية وضعت فى التعريف ، لان دالة مثل $\frac{2 \text{ط س}}{\text{أ}}$ لاتكون دورية ، اذا كانت دورتها أ فقط ، بل اذا كانت دورتها أيضا ٢ أ ، ٣ أ ..... الخ . والسبب هو أن :

$$\text{جا} \frac{2 \text{ط} (\text{س} + 3\text{أ})}{\text{أ}} = \text{جا} \left\{ \frac{2 \text{ط س}}{\text{أ}} + 6 \text{ط} \right\} = \text{جا} \frac{2 \text{ط س}}{\text{أ}}$$

يتبين من ذلك أن أصغر دورة ، هى التى تجب معرفتها وتسميتها دورة الدالة . ان الجزء الاعظم من نظرية الدوال الدورية ، وتطبيقاتها العملية كافة ، تخضع لنظرية هامة تسمى نظرية فورير Fourier وهى أنه اذا كانت د (س) دالة دورية دورتها أ ، واذا حققت د (س) بعض شروط معينة ، يفترض بالفعل وجودها ، على الدوام ، فى الدوال

التى تقتضيها الظاهرات الطبيعية ، يصبح فى الامكان كتابة د (س) كمجموعة من الحدود على الشكل :

$$\text{ح}_{0} + \text{ح}_{1}\ \text{جا}\left(\frac{2\ \text{ط}\ \text{س}}{\text{أ}} + \text{هـ}_{1}\right) + \text{ح}_{2}\ \text{جا}\left(\frac{4\ \text{ط}\ \text{س}}{\text{أ}} + \text{هـ}_{2}\right) + \text{ح}_{3}\ \text{جا}\left(\frac{6\ \text{ط}\ \text{س}}{\text{أ}} + \text{هـ}_{3}\right) + \cdots\cdots \ \text{الخ}$$

وتعد ح_{0} ، ح_{1} ، ح_{2} ، ح_{3} ... الخ وكذلك هـ_{1} ، هـ_{2} ، هـ_{3} ... الخ فى الدستور هذا ، كميات ثابتة تم اختيارها لتلائم الدالة الخاصة . ولنسأل الان ما عدد الحدود التى يجب اختيارها ؟ وهنا تبرز مشكلة جديدة ، لاننا نستطيع أن نبرهن أن كل ما يمكن عمله بوجه عام ، باستثناء بعض الحالات الخاصة التى يكتفى فيها بعدد معين من الحدود ، هو أن نقترب من قيمة الدالة الى أى حد نشاؤه ، بتزيد عدد الحدود . وعملية التقريب التدريجى هذه تؤدى بنا الى التفكير بنظرية المتسلسلات اللانهائية التى تؤلف قسما رئيسيا من النظرية الرياضية التى ستكون موضع النظر فى الفصل القادم .

ان الطريقة ، التى ذكرناها أعلاه ، فى التعبير عن دالة دورية على شكل حاصل جمع عدد من الجيوب ، تسمى « التحليل التوافقى » للدالة . مثال ذلك ان المد ، فى أية نقطة على ساحل البحر ، يرتفع وينخفض بصورة دورية . فهو يحدث فى نقطة ما على مضيق دوفر ، مرتين فى اليوم بسبب دوران الارض . ويتعقد ارتفاع المد وانخفاضه اليومى ،

بسبب وجود موجتين مدّيتين ، تأتى الاولى منهما صاعدة عن طريق القناة الانكليزية أما الثانية فتأتى من الشمال ، وبعد أن تلف حول شمالى اسكتلندة ، تنحدر نحو الجنوب الى البحر الشمالى • وبعض نوبات المدّ تكون أعلا من غيرها • وهذا ناشىء عن أن للشمس أثرا فى توليد المد كما للقمر • فينتج عن ذلك دورات شهرية ودورات اخرى • واذا أهملنا المفعول الاستثنائى للرياح وهو ما لا يمكن التنبوء به ، تكون القضية العامة للتحليل التوافقى للمد ، عبارة عن وجدان مجموعات من الحدود ، كالتى ذكرناها فى التعبير الوارد فى الصحيفة السابقة ، بحيث تعطينا كل مجموعة ، بدقة تقريبية ، مدى الارتفاع الذى تسببه فى اية لحظة كانت ، العوامل المولّدة للمد فى دورة واحدة • ويكون السند (س) اذ ذاك ، الزمن محسوبا من لحظة بدائية مناسبة •

وتخضع حركة اهتزاز وتر الكمنجة الى تحليل توافقى مماثل لما بيناه ومثلها اهتزازات الاثير والهواء التى تناظر النور والصوت على الترتيب • نحن الان أمام طريقة أساسية من طرق الفيزياء الرياضية وهى الطريقة العامة لمعالجة الحقيقة الطبيعية العظمى وأعنى بها الدورية •

الفصل الرابع عشر

المتسلسلات

SERIES

لم يصب الضرر أى قسم من الرياضيات ، بسبب الصورة التافهه التى يقدم بها للمبتدئين ، كما أصاب موضوع المتسلسلات المهم • اذ يبدأ باعطاء مثالين صغيرين ، هما المتوالية العددية والمتوالية الهندسية • ولا تخفى أهمية هذين المثالين لانهما من أسهل الامثلة عن نظرية عامة مهمة • ولكن الاراء العامة لا يكشف عنها وبذلك تصبح الامثلة هذه وهى لا تمثل شيئا ، هراء سخيفا •

ان الفكرة الرياضية العامة عن المتسلسلة هى أنها مجموعة من أشياء منسقة على وفق ترتيب ، أى بالتتابع • ويتمثل هذا المعنى نفسه باستعمالنا المعتاد للكلمة • لننظر مثلا فى سلسلة رؤساء الوزارة الانكليز فى القرن التاسع عشر فنجدهم مصنفين بالترتيب الذى تولى كل منهم هذا المنصب أول مرة خلال ذلك العصر • فتبدأ السلسلة بوليم بيت وتنتهى باللورد رزبرى الذى كتب تأريخ حياة الاول •

لقد كان فى وسعنا أن نرتب هؤلاء الرجال وفق تراتيب متسلسلة

أخرى ، كأن نرتبهم على حسب أطوالهم أو أوزانهم ولكن مثل هذه التراتيب تبدو سخيفة عند تطبيقها على رؤوساء الوزارات وهى بالبداهة لا ترد على الخاطر . ولكنها من الوجهة الفكرية البحتة ، تعد تراتيب كغيرها على السواء . واذا كان أحد التراتيب لمجموعة من الحدود ، أكثر أهمية أو أشد وضوحا من التراتيب الاخرى لها ،قيل عنه انه هو « الترتيب » لتلك الحدود . وعلى ذلك « فالترتيب » للاعداد الصحيحة ، يعنى دوما ، الترتيب الذى تصنف به على حسب أقدارها ، على أنه من البديهى وجود كيفيات لا حصر لها فى ترتيب الاعداد الصحيحة . واذا كان عدد الاشياء التى يراد ترتيبها محدودا ، سمى عدد التراتيب التى يمكن اجراءها عدد « تباديلها Permutations » . فعدد تباديل مجموعة مؤلفة من ن من الاشياء على اعتبار أن ن عدد صحيح محدود هو : ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × (ن - ٣) × ...... × ٤ × ٣ × ٢ × ١ . أى حاصل ضرب أول ن من الاعداد الصحيحة . ونظرا لما لحاصل الضرب هذا من أهمية فى الرياضيات ، فقد وضع له رمز خاص به . فهو يكتب على الدوام ، « ن ! »[١] ، وعليه فان ٢ ! = ٢ × ١ = ٢ ، ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦ ، ٤ ! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ ، ٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ وعندما تكبر ن تزداد قيمة ن ! بسرعة . مثال ذلك أن ١٠٠ ! هى مائة مرة بقدر ٩٩ ! .

---

(١) تسمى ن ! « نون العاملية » وتكتب أيضا على الشكل <u>ن|</u>

من السهل أن نتحقق ، فى الحالات التى تكون فيها ن صغيرة ، من أن ن ! هى عدد الكيفيات التى يمكن أن ترتب بها ن من الاشياء مثال ذلك اذا أخذنا شيئين أ ، ب فيمكن أن يرتبا بكيفتين أ ب ، ب أ وان ٢! = ٢ ٠

فاذا أخذنا ثلاثة أشياء أ ، ب ، حـ ، أمكن أن نرتبها بست كيفيات وهى أ ب حـ ، أ حـ ب ، ب أ حـ ، ب حـ أ ، حـ أ ب ، حـ ب أ ولكن ٣! = ٦ ٠ ومثل ذلك يقال عن الاربع والعشرين كيفية التى يمكن أن ترتب بها أربعة أشياء أ ، ب ، حـ ، د ٠

أما اذا أتينا الى المجموعات التى تتألف مما لا نهاية له من الاشياء ، كمجموعة الاعداد الصحيحة بأسرها أو مجموعة الكسور جميعها أو مجموعة الاعداد الحقيقية مثلا — فاننا ندخل من فورنا فى تعقيدات نظرية أنواع الصنف Order type ٠ وقد لمحنا الى هذا الموضوع فى الفصل السادس عندما نظرنا فى الاصناف الممكنة للاعداد الصحيحة والكسور والاعداد الحقيقية ٠ وقضية أنواع الصنف هذه موضوع جديد نسبيا فى الرياضيات وهو على جانب كبير من الاهمية ، ولكننا لن نتطرق اليه بعد الان ٠

ان جميع المتسلسلات اللانهائية التى ننظر فيها الان ، هى من نفس نوع صنف Order type الاعداد الصحيحة المرتبة ترتيبا تصاعديا على حسب أقدارها ، بحيث يكون لها حدّ أول ويكون لكل حد ، حد يسبقه مباشرة واخر يتلوه ، باستثناء الحد الاول ، الذى له حد يتلوه

مباشرة وليس له حد يسبقه • وعليه اذا كانت م أى عدد صحيح (غير الصفر) ، تحتم وجود حد ميمى على الدوام • واذا كان عدد حدود المتسلسلة منتهيا (ولنقل أنه ن) ، يكون لحدودها خواص المتسلسلة اللانهائية نفسها من حيث التجاور والتالى والفرق الوحيد بينهما هو أن يكون للمتسلسلة المنتهية حد أخير هو الحد النونى •

والامر المهم الذى يقتضى عمله فى متسلسلات الاعداد ـ سنستعمل فى المستقبل كلمة « متسلسلة » أو « سلسلة » بالمعنى المحدود الذى ذكرناه أعلاه ـ هو جمع حدودها المتتالية •

اذا كانت $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ••••• $ح_{ن}$ •••• تمثل على الترتيب الحد الاول والثانى والثالث •••• والحد النونى •••• لمتسلسلة ما ، فاننا نؤلف منها المتسلسلات الاتية على التوالى : $ح_{١}$ ، $ح_{١} + ح_{٢}$ ، $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣}$ ، $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ح_{٤}$ وهكذا دواليك • ويكتب مجموع أول ن من الحدود هكذا :

$$ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ح_{٤} + \cdots\cdots\cdots\cdots + ح_{ن}$$

واذا كان للمتسلسلة عدد منته من الحدود فاننا نتوصل بهذه الوسيلة الى وجدان مجموع حدودها جميعا • أما اذا كان عدد الحدود لا نهاية له فان عملية اضافة الحدود بالتتابع ، الى مجموع الحدود السابقة لها ، تصبح عملية لا نهاية لها • وبهذا المعنى لا يوجد ما يسمى مجموع متسلسلة لا نهائية •

ولكن ما هى أهمية جمع الحدود بالتتابع على الوجه الذى أشرنا اليه ؟ والجواب ، اننا نرمز بذلك الى العملية الفكرية الاساسية للتقريب وهى عملية ذات أهمية تمتد الى ما وراء الحقـول الرياضيـة • لان أفهامنـا المحدودة لا تطيق التعامل بالقضايا المعقدة بجملتها ، فنلجأ فى ترتيبهـا الى طريقة التقريب • فرجل الدولة عندما يصوغ خطابه يضع القضايا الرئيسية فى المقام الاول ويدع التفاصيل تحتل مكانها الثانوى • وتوجد ، بالطبع ، الطريقة الفنية المعاكسة لهذه ، وهى تهيئة المخيلة بتقديم تفاصيل خاصة أو فرعية ثم تسمو بالتدريج الى الفكرة الحاسمة • ان كلا من هاتين الطريقتين تعمل على تجميع[1] النتائج بصورة تدريجية • وهذا بالضبط ما نصنعه عند التجميع المتتالى لحدود متسلسلة ما • وطريقتنا المعتادة فى التعبير عن الاعداد ، أو على الاقل الاعداد الكبيرة ، هى من عمليات الجمع التدريجى • فالعدد ٥٦٨٫٢١٣ يتمثل للفكر على الشكل

٠٠٠ ٥٠٠ + ٠٠٠ ٦٠ + ٠٠٠ ٨ + ٢٠٠ + ١٠ + ٣

أما فى الكسور العشرية فالامر أشد وضوحا • فالعدد ٣٫١٤١٥٩ هو :

$$٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠٠} + \frac{٩}{١٠٠٠٠٠}$$

وان كلا من ٣ ، $٣ + \frac{١}{١٠}$ ، $٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠}$ ، $٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠}$ ، $٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠٠}$

هى تقريبات متتالية للنتيجة الكاملـة ٣٫١٤١٥٩ • واذا قـرأنا العـدد

---

(1) Summation

٥٦٨ر٢١٣ بصورة عكسية ، أى من الجهة اليمنى ، مبتدئين بالـ ٣ فان قراءتنا تكون على الطريقة الفنية التى تهيىء الفكر تدريجيا للعدد ٥٠٠ ٠٠٠ ٠

والطريقة المعتادة فى ضرب الاعداد تبدأ بتجميع متسلسلات ٠ لننظر مثلا فى عملية الضرب :

٣٤٢

٦٥٨

٢٧٣٦

١٧١٠

٢٠٥٢

٢٢٥٠٣٦

نجد أن السطور الثلاثة المطلوب وجدان مجموعها تؤلف متسلسلة حدها الاول هو السطر الاعلى ٠ وخضوع هذه المتسلسلة للطريقة الفنية ، التى تضع أهم الحدود فى الاخير ، لم ينشأ عن شعور خاص نحو الفن بل للسهولة الناشئة عن الاستمساك بموقع الاحاد ، الامر الذى يمكننا من حذف بعض الاصفار الضرورية عرفا ٠

اما اذا أجرينا التقريب ، بان نجمع بالتدرج الحدود المتتالية لمتسلسلة لا نهائية ، فيقتضى أن نعلم مم نقرب ؟ فالصعوبة هى أن المتسلسلة هذه لا « مجموع » لها بالمعنى المتعارف لهذه الكلمة ، لان عملية جمع حدودها لا يمكن أن تكمل ٠ والجواب اننا نقرب مجموع المتسلسلة الى « غاية »

ولذلك وجب علينا أن نفسر ما يعنى بكلمة « غاية » المتسلسلة •

يقال ان تجميع متسلسلة يقترب من غاية ، اذا كان مجموع أى عدد من حدودها ، بشرط أن يكون هذا العدد كبيرا كفاية ، يساوى على وجه التقريب ، الغاية بقدر ما نود الاقتراب منها •

ولكن من الواضح أن هذا الوصف لمعنى التقريب من غاية ، لا يثبت بازاء تمحيص الرياضيات الحديثة الشديد • اذ ماذا يقصد بـ « كبيرا كفاية » وبـ « يساوى على وجه التقريب » وبـ « قدر ما نود الاقتراب منها » • هذه التعابير الغامضة تتطلب توضيحا بدلالة الفكر البسيطة المجردة ، التى وحدها يسمح بها فى الرياضيات البحتة •

لنفرض أن الحدود المتتالية للمتسلسلة هى $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ ، •••$ح_{ن}$ ••• الخ بحيث يكون $ح_{ن}$ هو الحد النونى للمتسلسلة •

كذلك لنفرض أن $حـ_{ن}$ هو مجموع أول ن من الحدود مهما كانت قيمة ن • وعليه يكون :

$$حـ_{١} = ح_{١} ، حـ_{٢} = ح_{١} + ح_{٢} ، حـ_{٣} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} ،$$

$$حـ_{ن} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + •••• + ح_{ن}$$

ان الحدود $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ، $حـ_{٣}$ •••••$حـ_{ن}$ •••• تؤلف متسلسلة جديدة • وتأليف هذه المتسلسلة هو عملية تجميع المتسلسلة الاصلية • ويكون معنى « تقريب » ، « تجميع » المتسلسلة الاصلية من « غاية » هو تقريب حدود هذه المتسلسلة الجديدة من غاية • فعلينا اذن أن نفسر

قصدنا فى تقريب حدود متسلسلة من غاية .

اذا تذكرنا تعريف « مقياس التقريب » (الذى سبق وأعطيناه فى الفصل ١٢) فان فكرة الغاية تعنى ما يأتى : تكون غ غاية حدود المتسلسلة $ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ح_ن$ ، ... اذا أمكن أن يوجد مقابل كل عدد حقيقى مثل ك ، نتخذه مقياسا للتقريب ، حد يناظره فى المتسلسلة مثل $ح_ن$ ، بحيث أن كل الحدود التالية له (أى $ح_{ن + ١}$ ، $ح_{ن + ٢}$ ، ... الخ) تقترب من غ ضمن مقياس التقريب الذى اتخذناه . واذا وقع اختيارنا على مقياس أصغر ، مثل $ك_١$ ، فان الحد $ح_ن$ ربما جاء مبكرا فى المتسلسلة ، واذ ذاك يجب أن يوجد فيما يتلوه ، حد مثل $ح_م$ تتوفر فيه الخاصية المذكورة أعلاه .

ومن البين عند تحقق هذه الخاصية أنك اذا سرت فى المتسلسلة $ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_ن ، ...$ ، من اليمين الى اليسار فستصل بعد مدة الى حدود تكون جميعها أقرب الى غ (أى أن الفرق بينها وبين غ يكون أصغر) من أى عدد يقع اختيارك على تعيينه ، وبتعبير آخر تقرب من غ ، بدرجة التقريب التى تريدها . وهنا ندرك من الفور العلاقة بين هذا التعريف لغاية المتسلسلة وتعريف الدالة المطردة الذى ذكرناه فى الفصل الحادى عشر .

نعود الآن الى المتسلسلة الاصلية $ح_١ ، ح_٢ ، ... ، ح_ن ، ...$

لنقول ان غاية حـدود المتسلسلـة $ح_١$ ، $ح_٢$ ، ... $ح_ن$ ، ... هـو « مجموع ما لا نهاية له » من حدود المتسلسلة الاصلية . ومن الجلى أن هذا الاستعمال لكلمة (مجموع) مصطنع جدا ، ويجب أن لا نمنح المجموع المعتاد لعدد محدود من الحدود خواص مماثلة دون تمحيص خاص .

لننظر الان فى نموذج من «الجمع الى ما لا نهاية له» . ولنأخذ الكسر العشرى الدورى ١١١١ر. ... ان هذا الكسر العشـرى هو طريقـة ترمز الى « مجموع ما لا نهاية له » من المتسلسلة ١ر. ، ٠١ر. ، ٠٠١ر. ، ٠٠٠١ر. .. الخ . أما المتسلسلة المناظرة لها التى نستخرجها بالتجميع فهى $ح_١$ = ١ر. ، $ح_٢$ = ١١ر. ، $ح_٣$ = ١١١ر. ، $ح_٤$ = ١١١١ر. .... الخ . وغاية مجموع حدود هذه المتسلسلة هو $\frac{١}{٩}$ ومن السهل معرفة ذلك بمجرد القسمة لان :

$$\frac{١}{٩} = ١ر. + \frac{١}{٩٠} = ١١ر. + \frac{١}{٩٠٠} = ١١١ر. + \frac{١}{٩٠٠٠} \text{ الخ } ...$$

وعليـه اذا جعلنا $\frac{٣}{٢٧}$ (الـ « ك » الواردة فى التعريف) فان كلا من ١ر. وجميع الحدود التالية له تختلف عن $\frac{١}{٩}$ بأقل من $\frac{٣}{٢٧}$ أمـا اذا جعلنا $\frac{١}{٢٠٠٠}$ (وهو اختيار آخر للـ « ك » الواردة فى التعريف) فان كلا من ١١١ر. وما تلاها من الحدود يختلف عن $\frac{١}{٩}$ بأقل من $\frac{١}{٢٠٠٠}$ وهكذا مهما اخترنا قيمة ك .

وليلاحظ أننا لم نقل شيئا يعطينا فكرة ، مهما كانت ضئيلة ، عن كيفية

وجدان « المجموع الى ما لا نهاية له » لمتسلسلة ، بل اقتصرنا على ذكر الشروط التى يجب أن يحققها مثل هذا العدد . والحقيقة ان وجدان طريقة عامة يستخرج بموجبها ، فى كل الحالات ، مجموع ما لا نهاية له من متسلسلة ما ، أمر خارج الصدد لسبب معين ، وهو أن مثل هـذا المجموع ، كما عرف هنا ، لا يوجد دوما . فالمتسلسلات التى لها مجموع ، الى ما لا نهاية له من حدودها ، تسمى « متقاربة » ، اما التى ليس لها مجموع ، الى ما لا نهاية له من حدودها ، فتدعى « متباعدة » . وكمثال بيّن عن المتسلسلة المتباعدة ، خذ ، ١ ، ٢ ، ٣ ..... ن ... ، أى سلسلة الاعداد الصحيحة مرتبة حسب أقدارها . فاذا حاولت أن تجعل عددا ما مثل ل ، مجموعا لحدودها الى مالانهاية له ، ضمن أى مقياس للتقريب تختاره مثل ك ، فستجد أن فى وسعك على الدوام اذا أخذت عددا كافيا من الحدود أن تحصل على مجموع يختلف عن ل بأكثر من ك . ومثل اخر عن المتسلسلة المتباعدة هو ١ ، ١ ، ١ .... الخ وهى المتسلسلة التى يساوى كل حد من حدودها واحدا . وهنا يكون ، ن ، مجموع ن من الحدود . وهذا المجموع يزداد ، دون حد ، كلما ازدادت ن . ومثال ثالث عن المتسلسلة المتباعدة هو ١ ، -١ ، ١ ، -١ ... أى المتسلسلة التى تكون حدودها على التناوب ١ ، - ١ وفيها نجد أن مجموع أى عدد فردى من الحدود يساوى واحدا ، ومجموع أى عدد زوجى منها يساوى صفرا . وعليه فان حدود المتسلسلة $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ..... $ح_{ن}$ ... الخ لا تقترب من غاية رغم أن قيمتها لا تزداد دون حد .

من المغرى أن نظن أن الشرط فى وجود مجموع للحدود $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، ٠٠٠٠ $ح_{ن}$ ، ٠٠ الى ما لا نهاية له هو أن تتناقص $ح_{ن}$ دون حد ، بتزايد ن • وهذا الامر ، لو صح ، لكانت الرياضيات علما أسهل جدا مما هى عليه الان ولكن هذا الظن خاطئ• مع الاسف •

مثال ذلك ان المتسلسلة ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ٠٠ $\frac{١}{ن}$ ٠٠ الخ متسلسلة متباعدة • ومن السهل بيان ذلك • لننظر فى مجموع ن من حدودها ، مبتدئين بالحد (ن + ١) وهذه الحدود هى :

$\frac{١}{ن+١}$ ، $\frac{١}{ن+٢}$ ، $\frac{١}{ن+٣}$ ، ٠٠٠ $\frac{١}{٢ن}$ ويبلغ عددها ن وأصغرها هو $\frac{١}{٢ن}$ وعلى ذلك فان مجموعها اكبر من ن مرة $\frac{١}{٢ن}$ اي ($ن \times \frac{١}{٢ن} = \frac{١}{٢}$)

أى أكبر من $\frac{١}{٢}$ • والان نستطيع أن نجمع الحدود المتجاورة دون أن نتعرض للمجموع الى ما نهاية له ان وجد ونحصل على المتسلسلة التالية :

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ + $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٧}$ + $\frac{١}{٨}$ ، ٠٠٠٠ الخ •

وهى ، بموجب ما ذكر أعلاه ، متسلسلة جميع حدودها ، بعد الحد الثانى ، أكبر من حدود المتسلسلة ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ٠٠٠٠ الخ ، التى تساوى جميع حدودها بعد الحد الاول • ولكن هذه المتسلسلة متباعدة وعليه فالمتسلسلة الاصلية متباعدة أيضا* •

* يرجى مراجعة الملاحظة ج فى اخر الكتاب •

ان قضية التباعد تبين لنا كم يجب أن نحتاط ، عند مناقشة خواص المجموع لعدد متناه من الحدود لنتوصل منها الى خواص مجموع متسلسلة لا نهائية . فالخاصية الاولية لعدد متناه من الحدود ، هى بالطبع ، وجود مجموع لها أما المتسلسلة اللانهائية فليس من الضروى أن تمتلك هذه الخاصية الاساسية . وهذا الاحتياط هو مجرد اشارة لئلا نسيء فهم ما يوحيه الاصطلاح العلمى (مجموع) فى المتسلسلات اللانهائية .
وقد جرت العادة أن يشار الى مجموع المتسلسلة اللانهائية $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، ..... ، $ح_{ن}$ ، ... ب $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \dots ح_{ن} + \dots$ الخ

لنتقدم الان الى تعميم فكرة المتسلسلة ، فنجد أن الرياضيات ، وفقا لاساليبها ، تضع هذا التعميم مستعينة بالمتغير . كنا قد قصرنا تفكيرنا حتى الان على المتسلسلات التى كل حد معين فيها ، عدد معين . ولكننا نستطيع بسهولة أن نعمم ذلك فنجعل كل حد تعبيرا رياضيا ، يتضمن متغيرا مثل س . ويصبح فى وسعنا أن ننظر فى متسلسلة مثل ١ ، س ، $س^{٢}$ ، $س^{٣}$ ...... $س^{ن}$ ... أو فى متسلسلة مثل س ، $\frac{س^{٢}}{٢}$ ، $\frac{س^{٣}}{٣}$ ، ... $\frac{س^{ن}}{ن}$ ...

وكيما نرمز الى الفكرة العامة لدالة كهذه ، نتصور دالة لـ س ، ولتكن $د_{ن}$ (س) ، تحتوى فى تكوينها على العدد الصحيح المتغير ن .

ثم نعطى ن ، القيم ١ ، ٢ ، ٣ .. الخ على التوالى ونحصل على المتسلسلة :

$\text{د}_{١}(\text{س})\text{، }\text{د}_{٢}(\text{س})\text{، }\text{د}_{٣}(\text{س})\text{، }\ldots\ldots\text{، }\text{د}_{\text{ن}}(\text{س})\ldots$ الخ

ومثل هذه المتسلسلة تكون متقاربة لبعض قيم س ومتباعدة لقيم أخرى • ومن النادر حقا وجود متسلسلة تحتوى على متغير (س) وتكون متقاربة لجميع القيم التى نفترضها له ـ او على الاقل ـ ليس من سداد الرأى القول بذلك فى أية حالة خاصة • مثال ذلك لنفحص أسهل الحالات وهى المتسلسلة « الهندسية »

$$١\text{، }\text{س}\text{، }\text{س}^{٢}\text{، }\text{س}^{٣}\ldots\ldots\text{، }\text{س}^{\text{ن}}\text{، }\ldots$$

ومجموع ن من حدودها هو :

$$\text{ح}_{\text{ن}} = ١ + \text{س} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \ldots\ldots + \text{س}^{\text{ن}-١}$$

والآن لنضرب الطرفين فى س :

$$\text{س}\,\text{ح}_{\text{ن}} = \text{س} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \ldots\ldots + \text{س}^{\text{ن}-١} + \text{س}^{\text{ن}}$$

ثم نطرح السطر الاخير مما فوقه فينتج :

$$\text{ح}_{\text{ن}}(١ - \text{س}) = \text{ح}_{\text{ن}} - \text{س}\,\text{ح}_{\text{ن}} = ١ - \text{س}^{\text{ن}}$$

ومن ذلك ، ان لم تكن س = ١ ، ينتج :

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{١ - \text{س}^{\text{ن}}}{١ - \text{س}} = \frac{١}{١ - \text{س}} - \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{١ - \text{س}}$$

فاذا كانت س اقل عدديا من ١ فان $\frac{\text{س}^{\text{ن}}}{١ - \text{س}}$ تكون على الدوام اصغر

عدديا من (ك) كيفما اخترنا (ك) بشرط ان تكون ن كبيرة كفاية • وعليه اذا كانت س أقل عدديا من ١ تكون المتسلسلة ١ ، س ، س^{٢} ، ...... ، س^{ن} ، ... متقاربة وتكون غايتها $\frac{١}{١ - س}$ ونعبر عن ذلك رمزيا على الوجه :

$$\frac{١}{١ - س} = ١ + س + س^{٢} \cdots\cdots + س^{ن} + \cdots\cdots$$
$$(-١ < س < ١)$$

اما اذا كانت س اكبر عدديا من ١ او مساوية له فالمتسلسلة تكون متباعدة • وبقول آخر اذا وقعت س بين -١ و +١ تكون المتسلسلة متقاربة • اما اذا ساوت س ، -١ او +١ او وقعت خارج نطاق الفترة من -١ الى +١ تكون المتسلسلة متباعدة • وعليه تكون المتسلسلة متقاربة فى جميع النقاط ضمن الفترة من -١ الى +١ باستثناء نقطتى النهايتين •

وفى هذه المرحلة من بحثنا ينبعث سؤال آخر • لنفرض ان المتسلسلة :

$د_{١}$ (س) + $د_{٢}$ (س) + $د_{٣}$ (س) ... + $د_{ن}$ (س) + ... متقاربة لجميع قيم س الواقعة فى الفترة من أ الى ب ، أى ان المتسلسلة متقاربة لأية قيمة لـ س أكبر من أ وأصغر من ب ، كذلك لنفرض اننا نريد أن نتأكد ، عند التقريب من الغاية ، من جمع عدد كاف من الحدود بحيث يقع المجموع ضمن مقياس ما للتقريب مثل ك • والان هل نستطيع ، بشرط

وقوع قيمة س ضمن الفترة ، ان نعين على الدوام ، عددا من الحدود وليكن ن ، بحيث يقع مجموع ن او اكثر ، من الحدود ، فى نطاق مقياس التقريب المطلوب ؟ ؟

ان ذلك احيانا ممكن لكل قيمة من قيم ك ، وغير ممكن احيانا أخر . فان أمكن قيل عن المتسلسلة انها متقاربة بانتظام (أو منتظمة التقارب) ضمن الفترة ، وان لم يمكن قيل عنها انها متقاربة باضطراب (او مضطربة التقارب) ضمن الفترة . وسنصور ذلك بأسهل الامثلة وأسهل الاعداد :

لننظر فى المتسلسلة الهندسية :

$$١ + س + س^{٢} + س^{٣} + ... + س^{ن} + ...$$

وهى متقاربة ضمن الفترة من − ١ الى + ١ باستثناء القيمتين النهائيتين س = ± ١ الا انها ليست متقاربة بانتظام ضمن هذه الفترة . واليك السبب . اذا كانت حـ مجموع ن من الحدود فقد برهنا ان الفرق بين $جـ_{ن}(س)$ والغاية $\frac{١}{١ - س}$ هو $\frac{س^{ن}}{١ - س}$ لنفرض الآن ان ن أى عدد معلوم من الحدود وليكن ٢٠ ، ثم لنفرض ك أى مقياس معين للتقريب ، وليكن ١٠٠٠ر٠ ، فاذا اخذنا س قريبة كفاية من + ١ او قريبة كفاية من − ١ نتمكن من جعل القيمة العددية لـ $\frac{س^{ن}}{١ - س}$ اكبر من ١٠٠٠ر٠ وعليه فان ٢٠ حدا لا تكفى فى كل الفترة ، مع انها

أكثر من كافية فى بعض أجزاء الفترة .

ويصدق مثل هذا التعليل فى حالة أى عدد آخر نأخذه بدلا من ٢٠ وأى مقياس آخر للتقريب بدلا عن ٠٠١ر٠ فالمتسلسلة الهندسية

$$١ + س + س^{٢} + س^{٣} + ... + س^{ن} + ...$$

تكون اذن مضطربة التقارب خلال « كل » الفترة من -١ الى $+١$ ولكننا لو أخذنا أية فترة اصغر منها ، بحيث تقع نهايتيها ضمن الفترة من -١ الى $+١$ ، فان المتسلسلة الهندسية تكون منتظمة التقارب خلالها .

مثال ذلك لنأخذ الفترة من (٠) الى $+ \frac{١}{٢٠}$ فنجد ان أية قيمة لـ ن ، من القيم التى تكون بها $\frac{س^{ن}}{١-س}$ اقل عدديا من ك ، تجعل ما يصدق على أية قيمة لـ س واقعة على هاتين النهايتين ، يصدق على جميع القيم الاخرى لـ س بين النهايتين نفسيهما . والواقع ، ان القيمة العددية لـ $\frac{س^{ن}}{١-س}$ تتناقص عدديا بتناقص القيمة العددية لـ س .

مثال ذلك لنأخذ ك = ٠٠١ر٠ ولنجعل س = $\frac{١}{٢٠}$ فنجد انه :

اذا كانت ن = ١ فان $\frac{س^{ن}}{١-س} = \frac{\left(\frac{١}{٢٠}\right)^{١}}{١-\frac{١}{٢٠}} = \frac{١}{١٩} = ٠٥٢٦ر٠$ ... ٠٠٠١١١ر٠

واذا كانت ن = ٢ فان $\frac{س^{ن}}{١-س} = \frac{\left(\frac{١}{٢٠}\right)^{٢}}{١-\frac{١}{٢٠}} = \frac{١}{٣٨٠} = ٠٠٠١١١ر٠$

واذا كانت ن = ٣ فان $\frac{س^{ن}}{١ - س} = \frac{(\frac{١}{١٠})^{٣}}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{١}{٩٠٠} = ٠ر٠٠١١١٠٠٠$

واذا كانت ن = ٤ فان $\frac{س^{ن}}{١ - س} = \frac{(\frac{١}{١٠})^{٤}}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{١}{٩٠٠٠} = ٠ر٠٠٠١١١٠$

لذلك فان اربعة حدود تكفى لكل الفترة ، على انه ، فى بعض أجزاء الفترة ، يكون هذا العدد ، بالطبع ، أكثر مما تقتضيه الضرورة •

ولنلاحظ ان $١ + س + س^{٢} + ٠٠ ٠٠٠٠ + س^{ن} + ٠٠٠٠٠٠$ لما كانت متقاربة (ولو باضطراب) خلال الفترة من − ١ الى + ١ لكل قيمة من قيم س ضمن الفترة هذه ، فبالوسع وجدان عدد من الحدود ، ن ، يحقق لنا درجة او مقياس التقريب الذى نريده ، ولكن قيمة س كلما اقتربت من احدى النهايتين + ١ او − ١ ، وجب ان تتصاعد قيمة ن فى الكبر •

ومن العجيب ان هذا التمييز الهام بين التقارب المنتظم والتقارب المضطرب ، لم ينشر الا فى سنة ١٨٤٧ من قبل ستوكس (Stokes) الذى صار فيما بعد السير جورج ستوكس ، كما نشر بعد ذلك فى سنة ١٨٥٠ ، بصورة مستقلة من قبل سيدل (Seidel) وهو رياضى المانى•

ليس من الضـرورى ان تقع النقــاط الحرجة التى يظهر فيهـا التقارب المضطرب ، فى نهايتى الفترة التى يصح خـلالها التقـارب ، ولكن هذه خاصية المتسلسلات الهندسية •

ففى حالة المتسلسلة الهندسية $١ + س + س^٢ ..... + س^ن$ + ... ، يمكن التعبير عن الغاية ، خلال فترة التقارب ، بافادة جبرية سهلة هى $\frac{١}{١ - س}$ ، ولكن الامر ليس كذلك دوما . ففى كثير من الاحوال نستطيع ان نبرهن ان متسلسلة تتقارب خلال فترة معينة ، مع اننا لا نعلم عن غايتها اكثر من انها غاية المتسلسلة . وهذه طريقة صالحة جدا لتعريف الدالة ، أى تعريفها كغاية لمتسلسلة . والواقع ، انها هى الطريقة التى تعرف بها ، او يجب ان تعرف بها معظم الدوال .

ان اهم متسلسلة فى التحليل الاولى هى :

$$١ + س + \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٣}{٣!} + ... + \frac{س^ن}{ن!} + ...$$

وفيها ن ! تعنى ما سبق وعرفناه فى أوائل هذا الفصل . ويمكن البرهنة على ان هذه المتسلسلة متقاربة حتما « لجميع » قيم س ، وان تقاربها منتظم ضمن أية فترة نريدها . ولذلك فلها جميع الخواص الرياضية المريحة التى يجب ان تتوفر فى متسلسلة . وهى تدعى المتسلسلة الأسيّة ولنرمز لمجموعها الى ما نهاية له بـ س « أسية » . فينتج عن ذلك ان :

$$س(\text{أسية}) = ١ + س + \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٣}{٣!} + ... + \frac{س^ن}{ن!} + ...$$

..... وتسمى س (أسية) الدالة الأسية . وبمعرفة القليل من الرياضيات الاولية تسهل البرهنة على ان س (أسية) × ص (أسية)

= (س + ص) أسية .... (أ) ، وبتعبير آخر ان :

$$\text{س (أسية)} \times \text{ص (أسية)} = ١ + (\text{س} + \text{ص}) + \frac{(\text{س}+\text{ص})^{٢}}{٢!} + \frac{(\text{س}+\text{ص})^{٣}}{٣!} + \cdots + \frac{(\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}}}{\text{ن}!} + \cdots$$

والخاصية (أ) مثال على ما يدعى « نظرية الجمع » . فاذا عرفنا دالة ما ، [ولتكن د (س)] ، فأول ما نصنعه هو ان نحاول التعبير عن د (س + ص) بدلالة دوال معروفة لـ (س) وحدها ، ودوال معروفة لـ ص وحدها . فان امكن ذلك كانت النتيجة « نظرية جمع » . ولنظريات الجمع هذه دور هام فى التحليل الرياضى . فنظرية الجمع للجيب هى :

حا (س + ص) = جا س جتا ص + جتا س جا ص

ولجيب التمام :

جتا (س + ص) = جتا س جتا ص - جا س جا ص

والواقع، ان افضل الاساليب فى تعريف جا س وجتا س، ليس بالطرائق الهندسية المعقدة الواردة فى الفصل السابق بل بتعريفها كغايات للمتسلسلات التالية على الترتيب .

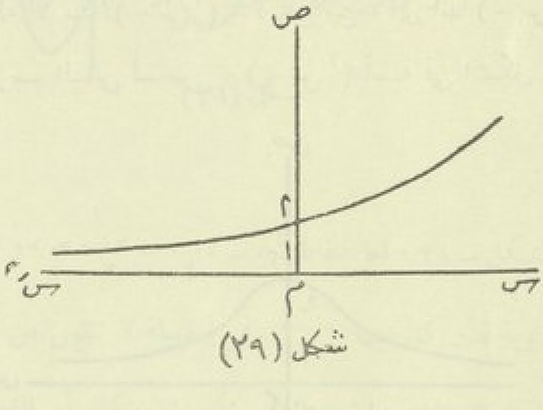
$$\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} - \frac{\text{س}^{٧}}{٧!} + \cdots \text{ الخ}$$

$$\text{و } ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} - \frac{\text{س}^{٦}}{٦!} + \cdots \text{الخ}$$

أى أن ٠ $جاس = س - \frac{س^٣}{٣!} + \frac{س^٥}{٥!} - \frac{س^٧}{٧!} + \cdots$ الخ

$$جتاس = ١ - \frac{س^٢}{٢!} + \frac{س^٤}{٤!} - \frac{س^٦}{٦!} + \cdots \text{الخ}$$

وهذه التعاريف تعادل التعاريف الهندسية ٠ ويمكن اثبات ان كلا من هاتين المتسلسلتين متقارب لجميع قيم س ، وان هذا التقارب منتظم خلال أية فترة ٠ وهاتان المتسلسلتان يحملان شبها عاما للمتسلسلة الأُسية المذكورة أعلاه ٠ والحقيقة انهما يرتبطان بها بواسطة نظرية الاعداد التخيلية التى أوضحناها فى الفصلين السابع والثامن ٠

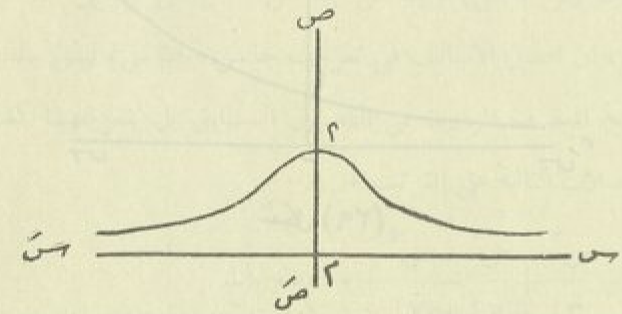


شكل (٢٩)

تجد الرسم البيانى للدالة الأُسية فى الشكل - ٢٩ ، وهو يقطع المحور م ص فى النقطة ص = ١ كما هو متوقع ٠ لانه عندما تكون س = ٠ ، يصبح كل حد فى المتسلسلة صفرا ، عدا الحد الاول ٠ واهمية

الدالة الأسية هى انها تمثل أية كمية فيزياوية (طبيعية) متغيرة ، يكون معدل تزايدها فى أية لحظة، نسبة مئوية ثابتة من قيمتها فى تلك اللحظة. مثال ذلك ، ان الرسم البيانى السابق يمثل مقدار السكان ، فى أية لحظة على ان يكون معدل الولادات منتظما ، وكذلك معدل الوفيات وبشرط عدم الهجرة ، مع العلم بأن س تمثل الزمن ، ابتداء من أى يوم يوافقنا ، وان ص تمثل عـدد السكان على حسب المقيـاس الذى نصطلح عليه . ويجب ان يكون المقياس بحيث ان م أ يمثل عدد السكان فى اليوم الذى اعتبرناه نقطـة الاصل . وهنا نلتقى بفكرة « معـدلات التزايد » وهى عنوان الفصل المقبل .

توجد دالة مهمة تكاد تتحد بالدالة الأسية ونحصل عليها اذا جعلنا سند الدالة الأسية ($-$ س^2) بدلا عن س ، أى انها ($-$ س^2) أسية . وتجد الرسم البيانى لـ ص = ($-$ س^2) أسية فى الشكل ـ ٣٠ .

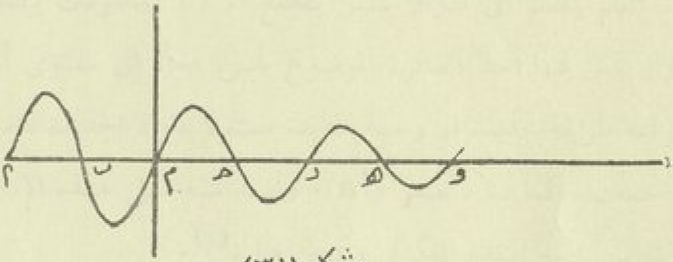


شكل (٣٠)

ان هذا المنحنى الذى يحمل بعض الشبه للقبعة المثلثة الشـــكل

يسمى منحنى الخطأ القياسى Curve of Normal Error ، والدالة التي تقابله (أى الدالة التى هو رسمها البيانى) ذات اهمية حيوية فى علم الاحصاء Statistics ، وهى تنبئنا ، فى حالات كثيرة ، بما يجب ان نتوقعه من انحرافات عن معدل النتائج .

ونستخرج دالة أخرى مهمة بمزج الدالة الأسية مع الجيب على الوجه التالى : ص = (- حـ س) أسية × جا $\frac{٢ ط س}{ق}$ وتجد رسمها



شكل (٣١)

البيانى فى الشكل - ٣١ . اما النقاط أ ، ب ، م ، حـ ، د ، هـ ، و ، فتقع على فترات متساوية قدر كل منها $\frac{ق}{٢}$ ، فى سلسلة لا تنتهى من الجهتين . وهذه الدالة تمثل تلاشى الاهتزازات بتأثير الاحتكاك أو القوى الملطفة (Damping Forces) . ولولا الاحتكاك لكانت الاهتزازات دورية، Periodic ، وفترتها ق ، ولكن تأثير الاحتكاك يجعل امتداد كل

اهتزاز ، اصغر من سابقه بنسبة مئوية ثابتة من ذلك الامتداد • وهـذا المزج ، بين فكرة « الدورية » (التى تتطلب الجيب او جيب التمام للرمز اليها) وفكرة « النسبة المئوية الثابتة » (التى تتطلب الدالة الأسية للرمز اليها) ، هو سبب كون الدالة على هذا الشكل ، أى كحاصل ضرب دالة جيب بدالة أسية •

الفصل الخامس عشر

الحساب التفاضلي

DIFFERENTIAL CALCULUS

احدث اختراع الحساب التفاضلى انقلابا فى تاريخ الرياضيات • فتقدم العلم ينقسم الى أدوار تتميز بتجمع الآراء والمعلومات ببطء ، وأدوار ينقل فيها أحد العباقرة الموضوع بأسره فجأة الى مستوى أعلى باختراعه طريقة جديدة او وجهة جديدة مستعينا بالمواد الجديدة للتفكير التى جمعت ، كما بينا ، بصبر وأناة • ولقد شبه شيلى هذه الادوار المتقابلة فى تاريخ التقدم الفكرى بتكوين هيارة(١) •

الهيارة التى ايقظتها الشمس ! وكتلتها
التى نخلتها العاصفة ثلاثا فتجمعت هناك
طبقة فوق طبقة ــ كذلك فى العقول التى تتحدى السماء
تراكم فكرة الى فكرة ، واحدى الحقائق العظيمة
تنبثق فتردد صداها الامم •

هذه المقايسة تحتاج الى شىء من التأكيد • اذ ليس من الضرورى

---

(١) أطلقنا كلمة هيارة على Avalanch وهى الكتلة الثلجية العظيمة تنفصل عن مرتفعات الجبل وتندفع على منحدراته الى الهاوية •

أن تكون الاشراقة الاخيرة لاشعة الشمس ، تلك التى أيقظت الهيارة ، أعظم قدرا من أن تقارن مع قوى الطبيعة الاخرى ، التى عملت على تكوينها ببطء • ويصدق مثل ذلك على العلم فليس من الضرورى أن يكون العبقرى الذى كان من حسن حظه أن ينتج الفكرة النهائية التى تغير مجرى من مجارى التفكير ، أكثر تفوقا من جميع أسلافه الذين عملوا على تكوين الاراء الاولية لها • ومن السخف ونكران الجميل أن نحصر اعجابنا عند النظر فى تأريخ العلم بؤولئك الذين تقدموا بالخطوات الاخيرة نحو دور جديد ، وأن نقف أمامهم مشدوهين •

وفى الحالة الخاصة التى أمامنا ، كان لهذا الموضوع تاريخ طويل قبل أن يأخذ قالبه النهائى على يد مخترعيه الاثنين • فقد وجدت بعض آثار طرائقه حتى بين رياضى اليونان ، وأخيرا وقبيل الانتاج الفعلى للموضوع كان فرمات ، (ولد سنة ١٦٠١ وتوفى سنة ١٦٦٥) وهو رياضى افرنسى ممتاز ، قد أدخل من التحسينات على الآراء السالفة ما يمكن أن يقال معه أنه أوجد الموضوع من العدم • ولفرمات هذا كذلك ان يدعى بأنه شارك معاصره ومواطنه ديكارت فى اختراع الهندسة الاحداثية • ومع أن ديكارت ، فى الواقع ، هو الذى اتحف عالم العلم بالآراء الجديدة ، فمما لاشك فيه أن فرمات كان قد توصل الى هذه الآراء بصورة مستقلة •

وعلى كل يجب أن لا تشوب اعجابنا بكل من نيوتن وليبنتز ، أية شائبة • فقد كان نيوتن رياضيا وباحثا فى العلوم الطبيعية ، وليبنتز رياضيا

وفيلسوفا ، وكان كل منهما فى دائرته الفكرية من أعظم العباقرة الذين عرفهم العالم . أما الاختراع المشترك ، فكان مدعاة لنقاش مؤسف لا يشرف أحدا .

فقد استعمل نيوتن فى سنة ١٦٦٦ ، طرق الـ Fluxions (معدلات الجريان) ، كما سمى الموضوع ، واستخدمها فى تأليف كتابه الاصول Principia . ولكن المؤلف ، كما طبع ، جاء خلوا من أية أشارة جبرية خاصة . ولم يطبع نيوتن بيانا صريحا لطريقته الا فى سنة ١٦٩٣ . أما ليبنتز فكان قد نشر بيانه الاول فى سنة ١٦٨٤ واتهمه أصدقاء نيوتن بأخذ الفكرة عن مخطوطة نيوتن التى اطلع عليها بصورة خصوصية . وأجاب ليبنتز على ذلك بأن اتهم نيوتن بانتحال آرائه . ولا يوجد كبير شك الان بأن كلا منهما له فخر الاكتشاف بصورة مستقلة . لان الموضوع كان قد وصل الى مرحلة من النضوج حان بها وقت اكتشافه . ولا عجب اذا تم العثور عليه بصورة مستقلة ، من قبل رجلين قديرين كهذين . ومثل هذه الاكتشافات المشتركة ، كثيرة الوقوع فى العلم . لان الاكتشافات ، بصورة عامة ، لاتحدث دون أن تمهد لها الوجهات الفكرية السابقة ، واذ ذاك تدخل عقول كثيرة فى سباق حام للكشف عن الفكرة المهمة . وبمجرد رجوعنا الى الاكتشافات ذات العلاقة بالانكليز ، يرد على الخاطر أن داروين ووالاس نشرا ، على انفراد وفى وقت واحد ، قانون الانتخاب الطبيعى ، وأن آدامس والفلكى الافرنسى لفريير اكتشفا فى وقت واحد ، وعلى الانفراد أيضا ، السيار

نيوتون • والنزاع حول من يجب أن يمنح فخر الاكتشاف ، يتأثر كثيرا ما بعوامل قومية لاقيمة لها • ان الصورة المشجعة حقا والتى يوحى بها تاريخ الرياضيات هى وحدة الفكر والمصلحة بين رجال جاءوا فى أزمنة متباينة ومن أمم كثيرة ومن شتى الاجناس • فقد قام كل من الهنود والمصريين والآشوريين والاغريق والعرب والايطاليين والافرنسيين والالمان والانكليز والروس بخدمات جوهرية لتقدم العلم • ومن المؤكد أن الزهو بما قدمته أمة معينة من أياد للعلم لايدل على نفس كبيرة •

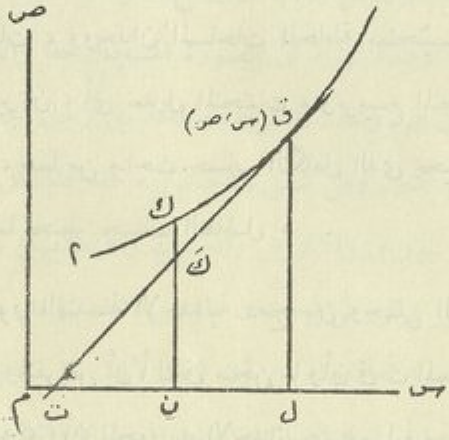
تأتى أهمية الحساب التفاضلى عن طبيعة الموضوع ذاتها ، وهى الملاحظة المنظمة لمعدلات تزايد الدوال • وتبرز الفكرة لنا ، من الفور ، عند درس الطبيعة • فالسرعة هى معدل تزايد المسافة ، والتعجيل معدل تزايد السرعة • وهكذا فان فكرة التغير الاساسية ، وهى التى نستند اليها فى ادراك الظاهرات الطبيعية ، توحى لنا من الفور ضرورة البحث فى معدل التغير • فالكلمات المتعارفة « سريعا » و « بطيئا » تستمد معناها من الاشارة الضمنية الى معدلات التغير • لذلك نجد فى الحساب التفاضلى مفتاح الطريق الذى يؤدى الى استعمال الرياضيات بنجاح فى تفسير مجرى الطبيعة •

ان فكرة معدل التغير ، كانت تدور بالتأكيد فى خلد نيوتن ، وقد تضمنتها أقواله التى شرح بها الموضوع • ويحوم الشك حول ما اذا كانت وجهة النظر هذه ، المشتقة من الظاهرات الطبيعية ، قد جالت فى أفكار الرياضيين السابقين ، الذين هيئو الموضوع أن يولد • فقد كانوا

مهتمين بالمسائل الاكثر تجردا ، وهى رسم المماسات للمنحنيات ووجدان اطوال المنحنيات ، ووجدان المساحات المحاطة بمنحنيات • وهاتان المسألتان الاخيرتان ، أى تعديل المنحنيات ، وتربيع المنحنيات ، كما تسميان الان ، هما من مباحث حساب التكامل الذى يحيط به الموضوع العام نفسه كما يحيط بحساب التفاضل •

ان ظهور الهندسة الاحداثية دمج بين وجهتى النظر • لنراجع الشكل – ٣٢ ولنفرض أن أ ك ق منحن ما وأن ق ت المماس له فى نقطة ق الواقعة عليه ، وأن المحورين الاحداثيين هما م س ، م ص وأن ص = د (س) هى معادلة المنحنى بحيث يكون م ل = س ، ق ل = ص • فاذا كانت ك أية نقطة متحركة على المنحنى واحداثياتها س$_١$ ، ص$_١$ ، ينتج أن ص$_١$ = د (س$_١$) • لنأخذ النقطة كَ على المماس بحيث يكون احداثيها الافقى س$_١$ نفسه ولنفرض أن أحداثيات كَ هى س$_١$ ، صَ • ثم لنفرض أن ن ، تتحرك على المحور م س من اليسار الى اليمين بسرعة منتظمة ، فيكون من السهل أن نرى أن الاحداثى الرأسى صَ ، للنقطة كَ الواقعة على المماس ت ق ، يزداد أيضا بصورة منتظمة مع حركة كَ على المماس بصورة مناظرة • ومن الواضح أن نسبة معدل تزايد كَ ن الى معدل تزايد م ن كنسبة كَ ن الى ت ن وهى نسبة ثابتة فى كل نقاط المستقيم المماس (الشكل – ٣٢) •

أما معدل تزايد ك ن ، أى معدل تزايد د (س$_١$) ، فيتغير من نقطة الى



شكل (٣٢)

أخرى على المنحنى ، طالما لايكون مستقيما • وعندما تجتاز النقطة ك النقطة ق يكون معـدل تزايد د (س١) [حيث تنطبـق س١ على س للحظة] كمعدل تزايد صَ على المماس فى ق • وعليه اذا كانت لدينا طريقة عامة لوجدان معدل تزايد دالة مثل د (س) ذات المتغير س ، يكون فى الوسع وجدان ميل المماس Slope فى اية نقطة (س ، ص) على المنحنى وبذلك نستطيع رسمه • وهكذا فان قضايا رسم مماسات لمنحنى وقضايا وجدان معدلات التزايد لدالة تصبح واحدة •

ويلاحظ أن الموضوع نشأ ـ كما هى الحال فى القطوع المخروطية والمثلثات ـ عن وجهة النظر الاكثر اصطناعا من بين وجهتى النظر • أما الناحية الاساسية حقا من هذا العلم فلم تبرز الا فى وقت متأخر نسبيا •

ومن القواعد الرصينة التأريخية العامة ، أن آخر مايكتشف فى علم من العلوم ، هو الموضوع الحقيقى الذى يدور حوله العلم • فقد يبقى الناس يتلمسون طريقهم لعدة عصور ، لاترشدهم الا غريزة خفية وحب متحير للاستطلاع حتى تتجلى أخيرا حقيقة عظيمة •

لنأخذ بعض الحالات الخاصة ، كى تألف انفسنا نوع الافكار التى نريد جعلها مضبوطة • قطار فى حالة الحركة ـ كيف نستخرج سرعته فى لحظة ما ولتكن لحظة الزوال ؟ يمكن أن نأخذ فترة خمس دقائق تكون لحظة الزوال من ضمنها ، ثم نقيس مقدار ما قطعه القطار خلال هذه المدة • ولنفرض أنه قطع خمسة أميال • فنستنتج اذذاك أن القطار كان يسير بمعدل ٦٠ ميلا فى الساعة • ولكن الخمسة أميال مسافة طويلة ، ولا يمكن أن نتأكد منها أن القطار فى لحظة الزوال ، كان يسير بهذه السرعة • فهو فى تلك اللحظة ربما كان يسير بسرعة ٧٠ ميلا فى الساعة ثم استعمل الموقف فور اجتيازها ، ولذلك يكون من الاصوب استعمال فترة أصغر منها ، ولنقل دقيقة واحدة ، تتضمن لحظة الزوال ثم نقيس المسافة التى قطعت فى هذه المدة • ولكن الحاجة قد تمس فى بعض الاغراض الى توخى تدقيق أكثر ، وربما كانت الدقيقة أطول مما يجب • وبما أن مقاييسنا ليست مضبوطة بحكم الضرورة ، كان من العبث ، فى التطبيقات العملية ، أخذ فترة قصيرة جدا للقياس فيها • أما من الوجهة النظرية ، فان الفترة كلما صغرت ، كانت النتيجة أفضل ، بل لتحدونا الرغبة الى القول بالحاجة الى فترة لامتناهية فى الصغر فى

سبيل الحصول على دقة مثلية . ولم يقف الرياضيون القدماء ، وعلى الاخص ليبنتز ، عند حدود مجرد الرغبة ، بل خضعوا لها وقالوا بالفكرة . وهذه الفكرة لاتزال حتى الآن طرازا نافعا من القول على أن نعرف كيف نفسرها بلغة المنطق السليم . ومن العجيب أن نيوتن ، وهو العالم الطبيعى ، كان فى عرضه لاسس حساب التفاضل والتكامل ، فيلسوفا أكثر من الفيلسوف ليبنتز . ولكن ليبنتز بدوره وضع نظام الاشارات المدهش الذى كان جوهريا لتقدم الموضوع .

نأخذ الآن مثالا آخر ، فى حقل الرياضيات البحتة ، ولنبدأ بالبحث عن معدل التزايد للدالة $س^٢$ ، لاية قيمة ، مثل س ، لسندها . لم نعرّف حتى الآن مانقصده بمعدل التزايد ، وسنحاول الآن تفهم معناه بالنسبة لهذه القضية الخاصة . عندما تزداد س الى س + هـ ، تزداد الدالة $س^٢$ الى $(س + هـ)^٢$ ويكون مجموع الزيادة $(س + هـ)^٢ - س^٢$ ، وهى ناشئة عن زيادة قدرها هـ فى السند ، وعلى ذلك يكون المقدار $\frac{(س+هـ)^٢ - س^٢}{هـ}$ معدل زيادة الدالة مقابل زيادة كل وحدة واحدة فى السند ، وذلك خلال الفترة من س الى (س + هـ) . ولما كان :

$$(س + هـ)^٢ = س^٢ + ٢ هـ س + هـ^٢$$

تصبح $$\frac{(س+هـ)^٢ - س^٢}{هـ} = \frac{٢ هـ س + هـ^٢}{هـ} = ٢ س + هـ$$

ويكون اذاً ، ٢ س + هـ هو معدل زيادة الدالة $س^٢$ عن زيادة كل وحدة واحدة فى السند ، وهذا المعدل أخذ خلال الفترة من س الى س + هـ • ولكن ٢ س + هـ تعتمد على هـ ، وهى سعة الفترة • أما معدل التزايد عند القيمة س للسند ، فمن الواضح امكان الحصول عليه بتنقيص هـ أكثر وأكثر • ولذلك فى « الغاية » عندما تكون هـ قد « تناقصت دون حد » نقول ان ٢ س هى معدل تزايد $س^٢$ ، عند القيمة س للسند •

وهنا أيضا نرى انفسنا مسوقين حسبما يظهر الى فكرة الكميات اللامتناهية فى الصغر ، باستعمالنا الكلمات « فى الغاية عندما تكون هـ قد تناقصت دون حد » • وكان ليبنتز يعتقد ، على غموض هذا الامر ، بوجود اشياء بالفعل من قبيل الكميات اللامتناهية فى الصغر ، ويتبع ذلك بالطبع وجود أعداد لا متناهية فى الصغر ، تناظرها • أما لغة نيوتن وآرائه فقد كانت اقرب الى النزعة الحديثة ، ولكنه لم ينجح فى تفسير القضية بوضوح كاف يظهر منه بجلاء أنه عمل أكثر من تفسير آراء ليبنتز بطريقة غير مباشرة • وأول من أعطى التفسير الحقيقى للموضوع كان وايرستراس ومدرسة برلين الرياضية فى أواسط القرن التاسع عشر • ولكن بين ليبنتز ووايرستراس ظهرت كتابات كثيرة رياضية وفلسفية ، حول هذه الكميات الغامضة اللامتناهية فى الصغر ، التى اكتشفتها الرياضيات وتقدمت الفلسفة لتفسيرها • فقد أنكر بعض الفلاسفة مثل بيشوب بركلى ، وهم على صواب ، صحة الفكرة بتمامها ، لاسباب غير

التى أشرنا اليها هنا • ولكنه بالرغم من الانتقادات التى وجهت الى أسس الموضوع فقد بقيت تلك الحقيقة العجيبة وهى أن هذا التصرف الرياضى كان بلا شك صحيحا من حيث الجوهـر • والواقع أن الموضـوع كان صحيحا ولكن تفاسيره مغلوط فيها • ان امكانية صحة العمل مع الخطأ التام فى تفسير مايعمل ، هى التى تجعل النقد الخارجى ـ اذا كان القصد منه ايقاف اتباع طريقة ما ـ مجدبا ولا قيمة له فى تقدم العلم • ويكون من الاسلم الاسترشاد بغريزة الملاحظين المدربين ونزعتهـم الاسـتطلاعية لكونهم ، كما هو واضح ، قد توصلوا الى شىء ما • وعلى كل فالاثر العام الذى تركه نجاح الحساب التفاضلى كان مقدارا كبيرا من فلسفة خاطئة تدور حول اللامتناهى فى الصغر • ولا نزال نجد آثار هذا اللغو حتى الآن فى الايضاحات التى تقدمها الكثير من الكتب المدرسية فى الرياضيات الاولية عن حساب التفاضل • ومن القواعد السليمة القول بأن المؤلف فى الفلسفة أو الرياضيات اذا كتب بتعمق غامض ، انما يقول هراء •

كان على نيوتن أن يضع صيغته للقضية بقوله أن (هـ) اذا اقتربت من الصفر فان ٢ س + هـ تصبح فى الغاية ٢ س • ويكون من واجبنا اذ ذاك أن نفسر هذا القول بصورة لاتفترض ضمنيا وجود الكميـات اللامتناهية فى الصغر التى قال بها ليبنتز • ولدى قراءتنا لاسلوب نيوتن فى أقواله نجد من المغرى ، توخيا للبساطة ، أن يقال ان ٢ س + هـ هى ٢ س عندما تكون هـ صفرا • ولكن هذا لا يفى بالمرام، لانه يهمل الفترة من س الى س + هـ التى يحسب خلالها معدل التزايد • والقضية هى

كيف نحتفظ بفترة طولها هـ ، نحسب خلالها معدل التزايد ، على أن نعامل هـ فى الوقت عينه كأنها صفر • وقد فعل نيوتن ذلك بتصور وجود « غاية » ونتقدم الآن لذكر ايضاح وايرستراس للمعنى الحقيقى •

لنلاحظ أولا اننا عند بحثنا ٢ س + هـ ، كنا نعد س ثابتة القيمة و (هـ) متغيرتها • وبكلام آخر عوملت س معاملة متغير « ثابت » أو برامتر كما شرحنا ذلك فى الفصل التاسع ، أى أننا فى الحقيقة كنا نعد ٢ س + هـ كدالة سندها هـ • وعليه فى الوسع تعميم المسألة التى بين أيدينا بالاستفسار عما نعنيه بقولنا ان الدالة د (هـ) تجنح الى الغاية ل ، مثلا ، عندما يجنح سندها هـ الى القيمة صفر • ولكننا سنرى أيضا أن قيمة السند الخاصة وهى الصفر ليست من صلب الموضوع ، ونلحق ذلك ايضا بتعميم أوسع فنسأل عما نعنيه بقولنا ان الدالة د (هـ) تجنح الى الغاية ل عندما تجنح هـ الى القيمة أ •

وبموجب التفسير الوايرستراسى ، نجد أن كل الفكرة القائلة بأن هـ تجنح الى القيمة أ ، على انها تعطى صورة مجازية لمقصدنا ، تقع خارج الصدد تماما • اذ من الواضح اننا باحتفاظنا بشىء مثل قولنا « تجنح الى أ » ، كفكرة اساسية، سنبقى فى قبضة اللامتناهى فى الصغر، لاننا نعنى بذلك أن هـ قريبة (لامتناهيا) من أ • وهذا هو بالذات مانريد التخلص منه •

بناء على ذلك ينبغى أن نعيد سرد الكلام الذى يقتضى أن نفسره ونسأل عما نعنيه بقولنا ، ان غاية الدالة (هـ) فى أ هى ل •

ان غاية د (هـ) فى أ هى خاصية جوار أ وقد استعملت كلمة « جوار » بالمعنى الذى عرفناها به فى الفصل الحادى عشر عند بحث اطراد الدوال. فقيمة الدالة د (هـ) فى أ هى د (أ). ولكن «الغاية» تتميز فكريا عن القيمة وربما اختلفت عنها ، وقد توجد الغاية عندما تكون القيمة ليست معرّفة . كذلك سنستعمل الاصطلاح « مقياس التقريب » بالمعنى الذى عرّف به فى الفصل الحادى عشر . والواقع اننا فى تعريفنا للاطراد ، فى أواخر ذلك الفصل ، عرفنا الغاية بالفعل . وتعريف الغاية هو :

تكون ل غاية الدالة د (س) عند قيمة مثل أ لسندها س ، اذا اقتربت الدالة فى جوار أ من ل ، ضمن أى مقياس من مقاييس التقريب .

قارن هذا التعريف بتعريف الاطراد الذى سبق وذكرناه وهو :

تكون الدالة د (س) مطردة عند قيمة مثل أ لسندها ، اذا اقتربت قيمتها فى جوار أ من قيمتها عند أ ضمن « أى » مقياس كان من مقاييس التقريب .

يتضح من الفور ان الدالة تكون مطردة اذا كانت (١) تمتلك غاية عند أ . (٢) وكانت الغاية تساوى قيمة الدالة عند أ . ولذلك كانت الامثلة التى ضربناها عن الاطراد فى آخر الفصل الحادى عشر ، امثلة عن فكرة الغاية اذ انها جميعا ترمى الى البرهان على أن د (أ) هى غاية د (س) فى أ ، للدوال التى كانت قيد البحث ولقيمة أ التى كانت قيد

البحث . ومن الوجهة التعليمية يكون من الافيد النظر فى الغاية عند النقطة التى تكون فيها الدالة غير مطردة . مثال ذلك لننظر فى الدالة التى نجد رسمها البيانى فى (الشكل ـ ٢٠) فى الفصل الحادى عشر . وهذه الدالة عرّفت بأن قيمتها تساوى واحدا ، لكافة قيم السند على أن يستثنى من هذه القيم الاعداد الصحيحة ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ .... الخ ، وأن قيمة الدالة عند هذه الاعداد تكون صفرا . لنفكر الآن فى غايتها عندما تكون س = ٣ . فنجد فى تعريف الغاية أن قيمة الدالة عند أ (فى هذه الحالة أ = ٣) قد استثنيت . ولكن باستثنائنا د (٣) نجد أن جميع قيم د (س) ، عندما تقع س ضمن أية فترة من الفترات التى (١) تتضمن ٣ ولكن لا كنقطة نهائية و (٢) لاتمتد الى ٢ و ٤ ، تساوى واحدا . وعليه فالقيم هذه تقترب من الـ ١ ضمن أى مقياس كان من مقاييس التقريب . وينتج عن ذلك أن غاية د (س) يجب أن تكون ١ عندما تكون قيمة السند س = ٣ . ولكن التعريف ينص على أن د (٣) = ٠

هذا مثال عن دالة لها قيمة وغاية ، عند القيمة ٣ للسند ، ولكن القيمة لاتساوى الغاية . كما أننا فى ختام الفصل الحادى عشر ، بحثنا الدالة س^{٢} عند القيمة ٢ للسند . فكانت قيمتها عند ٢ تساوى ٢^{٢} أى ٤ كما برهنا أن غايتها كانت أيضا ٤ . وهنا نجد دالة لها قيمة وغاية متساويتان .

وأخيرا نأتى الى الحالة التى لها أهمية كبيرة لاغراضنا وهى الدالة التى لها ، عند قيمة معلومة لسندها ، غاية ولكن ليست لها قيمة معينة .

ولا نذهب بعيدا للبحث عن مثل هذه الدالة فان $\frac{س^2}{س}$ تكفى لبيان

مقصدنا. فلو نظرنا فى أى كتاب للرياضيات ربما نجد المعادلة $\frac{س^2}{س} = 2$

وقد كتبت دون تردد أو تعليق. ولكن فى الامر صعوبة وهى اذا كانت

س = ٠ فان $\frac{س^2}{س} = \frac{٠}{٠}$ و $\frac{٠}{٠}$ لامعنى محدد لها. ولذلك لا يكون لقيمة

الدالة $\frac{س^2}{س}$ معنى معينا عندما تكون س = ٠ . ولكن قيمة الدالة

$\frac{س^2}{س}$ تساوي ٢ عند أية قيمة أخرى لـ س. وعليه فان غاية $\frac{س^2}{س}$

هى ٢ عندما تكون س = ٠. ولكن لاقيمة لها عند س = ٠ وبمثل ذلك

فان غاية $\frac{س^2}{س}$ عندما تكون س = أ هى أ مهما كانت أ وينتج عن

ذلك أن غاية $\frac{س^2}{س}$ عند س = ٠ هى صفر . ولكن قيمة $\frac{س^2}{س}$ عند س

= ٠ تأخذ الشكل $\frac{٠}{٠}$ الذي لاقيمة معينة له . وعليه يكون للدالة $\frac{س^2}{س}$

غاية عند الصفر ولكن لاتكون لها قيمة.

نعود الان الى المسألة التى بدأنا بها هذا البحث عن طبيعة الغاية.

كيف سنعرف معدل تزايد الدالة $س^2$ عند أية قيمة س من قيم السند ؟

وجوابنا ان معدل التزايد هذا ، هو غاية الدالة $\frac{(س + ه)^2 - س^2}{ه}$

عندما تكون قيمة السند ه صفرا (لاحظ ان س هنا كمية ثابتة).

لننظر الان كيف يعمل هذا الجواب على ضوء تعريفنا للغاية . لدينا

$$\frac{(س + هـ)^{٢} - س^{٢}}{هـ} = \frac{٢ هـ س + هـ^{٢}}{هـ} = \frac{هـ (٢ س + هـ)}{هـ}$$

وعند بحثنا عن غاية $\frac{هـ (٢ س + هـ)}{هـ}$ عندما تكون قيمة السند هـ صفرا، نستثني قيمة الدالة (ان كانت لها قيمة ما) عند هـ = ٠ ولكن في جميع قيم هـ عدا القيمة هـ = ٠ تتمكن من القسمة على هـ، وعليه تكون $\frac{هـ (٢ س + هـ)}{هـ}$ عند هـ = ٠ هي نفسها غاية ٢ س + هـ عند هـ = ٠ فاذا اتخذنا الان أي مقياس نختاره للتقريب مثل ك، على اعتبار ان الفترة من + ½ ك الى − ½ ك، نجد ان قيم هـ الواقعة ضمنها تجعل الفرق بين ٢ س + هـ وبين ٢ س اقل من ½ ك أي اقل من ك . ويصدق هذا على « أي » مقياس ك . وعليه عندما تكون قيمة هـ في جوار الصفر، تقترب ٢ س + هـ من ٢ س ضمن أي مقياس كان من مقاييس التقريب . ولذلك تكون ٢ س هي غاية ٢ س + هـ عند هـ = ٠ . وبموجب ما بيناه اعلاه تصبح ٢ س غاية $\frac{(س + هـ)^{٢} - س^{٢}}{هـ}$ عند هـ = ٠ وينتج عن ذلك اذن، ان ٢ س هي ما أسميناه معدل تزايد $س^{٢}$ عندما تكون س قيمة السند . وهذه الطريقة تؤدي بنا الى معدل تزايد $س^{٢}$ نفسه كما يتوصل اليه بالطريقة الليبنتزية التي تجعل هـ تتضاءل الى ما لا نهاية له في الصغر .

وعلى العموم، يستعمل الاصطلاحان الاكثر تجردا وهما

« معامل التفاضل » أو « الدالة المشتقة » لما كنا ندعوه ، حتى الان « معدل تزايد » الدالة . اما التعريف العام فهو ما يأتى : ان معامل التفاضل للدالة د (س) هو غاية الدالة $\frac{د(س + ه) - د(س)}{ه}$ التى سندها ه ـ ان وجدت لها غاية ـ عندما يكون الصفر قيمة سندها .

كيف استطعنا بواسطة هذا التعريف وبمساعدة تعريف الغاية ان نتجنب بالتمام فكرة « العدد اللامتناهى فى الصغر » التى اقلقت اسلافنا الرياضيين ؟ ان المشكلة ظهرت عندهم لان كان عليهم من جهة ان يستعملوا الفترة من س الى س + ه ليحسبوا معدل التزايد فى اثناءها ، ومن جهة أخرى يريدون اخيرا ان يضعوا ه = . فكانت النتيجة ان ادى بهم المطاف ، على ما يظهر الى القول بوجود فترة مقدارها صفر . ولكن كيف نتجنب نحن هذه الصعوبة ؟ نفعل ذلك على الوجه التالى

نستخدم الفكرة القائلة بامكان وجدان فترة « ما » صفاتها كذا وكذا تناظر « أى » مقياس كان للتقريب . والفرق اننا ادركنا اهمية فكرة « المتغير » وهم لم يفعلوا ذلك . وهكذا نعود فى خاتمة استعراضنا للفكر الجوهرية فى التحليل الرياضى الى الآراء التى بدأنا بها بحثنا فى الفصل الثانى وهى ان الفكرتين ذاتى الاهمية الاساسية فى الرياضيات هما فكرتا « أشياء ما » و « أى الاشياء » .

الفصل السادس عشر

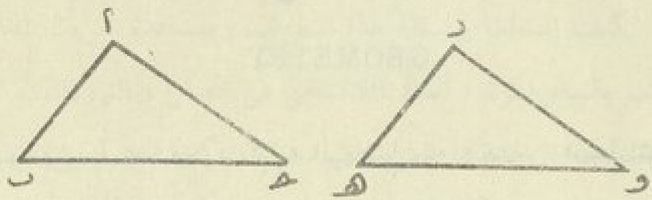
الهندسة

GEOMETRY

الهندسة علم مجرد كبقية الرياضيات . وتدرس فيها اشكال الاشياء ومواقعها النسبية . ولا حاجة بنا الى التفكير بمن يلاحظ هذه الاشياء او ما اذا كان يتعرف بها بالرؤية او اللمس او السمع . وبالاختصار تتجاهل كل الاحساسات الخاصة . وزيادة على ذلك تتجاهل الاشياء الخاصة كمباني البرلمان او الكرة الارضية . وكل قضية هندسية ، في تطرقها الى الاشياء ، أيا كانت ، تقتصر على ما لها من خواص هندسية هي كذا وكذا . ولاشك ان النظر الى امثلة خاصة من الكرات والمخاريط والمثلثات والمربعات يساعد مخيلتنا ، ولكن القضايا لا تصدق على الاشكال المطبوعة في الكتاب وحدها بل على أي شكل يماثلها .

فالهندسة كالجبر تسيطر عليها فكرة « أي» الاشيا وأشياء « ما » وهي تعالج بالطريقة نفسها ،العلاقات ما بين مجموعات الاشياء . مثال ذلك لنأخذ أي مثلثين أ ب حـ ، د هـ و . ما هي العلاقة التي يجب ان

توجد بين بعض أجزاء هذين المثلثين ليتساويا من جميع الوجوه ؟ ان هذا من الابحاث الاولى التى تعالجها كل كتب الهندسة الاولية ، وهى دراسة لمجموعة معينة من العلاقات المتبادلة بين المثلثين • والجواب ؟ ان المثلثين يتساويان من جميع الوجوه : اما (أ) اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من احد المثلثين ، الضلعين والزاوية المحصورة بينهما ،



شكل (٣٢)

المناظرة لها ، فى المثلث الاخر •

او (ب) اذا ساوت زاويتان والضلع الواصل بينهما من احد المثلثين ، الزاويتين والضلع الواصل بينهما ، المناظرة لها ، فى المثلث الآخر •

او (حـ) اذا ساوت الاضلاع الثلاثة من احدهما الاضلاع الثلاثة المناظرة لها فى الآخر •

ان هذا الجواب يوحى حالا باجراء استقصاء ابعد مدى • ما طبيعة العلاقات المتبادلة بين المثلثين اذا ساوت الزوايا الثلاث من احدهما الزوايا الثلاث المناظرة لها فى الآخر ؟ وهذ التحرى الجديد يؤدى بنا الى نظرية التشابه بكاملها (راجع الفصل الثالث عشر) وهى نوع آخر من

العلاقات المتبادلة •

لنأخذ مثالا آخر وذلك بتأمل البنيان الداخلي للمثلث أ ب حـ فنجد ان اضلاعه وزوياه ذات علاقة فيما بينها ـ الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر وزاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان • واذا انتقلنا الى علم المثلثات تأخذ هذه صيغة ادق تحديدا وهى الصيغة المألوفة

$$\frac{\text{جا أ}}{\bar{\text{أ}}} = \frac{\text{جا ب}}{\bar{\text{ب}}} = \frac{\text{جا حـ}}{\bar{\text{حـ}}} \quad \text{،} \quad \bar{\text{أ}}^{2} =$$

$\bar{\text{ب}}^{2} + \bar{\text{حـ}}^{2} - 2\,\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{حـ}}\ \text{جتا أ}$ مع دستورين يشبهانه •

يضاف الى ذلك وجود علاقة اكثر سهولة ما بين زوايا المثلث ، وهى ان مجموعها يساوى زاويتين قائمتين ، وعلاقة بين اضلاعه الثلاثة وهى ان مجموع طولى أى ضلعين اكبر من طول الضلع الثالث •

ان الطريقة الصحيحة لدراسة علم الهندسة تكون بالتفكير بالاشكال السهلة الممتعة ، مثل المثلث والمتوازى الاضلاع والدائرة واستقصاء العلاقة فيما بين اجزائها المختلفة • فلا يكون فى ذهن المختص بعلم الهندسة قضية منعزلة بل شكل تعتمد اجزاؤه المختلفة على بعضها البعض ، ويقوم المختص كما فى الجبر بتعميم المثلث ليشمل المضلع والضلع ليشمل القطع المخروطى • او ان يتخذ طريقا معاكسا فيصنف المثلثات على حسب كونها متساوية الاضلاع أو متساوية الساقين أو مختلفة الاضلاع ، والمضلعات على حسب عدد اضلاعها ، والقطوع المخروطية على حسب كونها قطوعا زائدة او ناقصة او متكافئة •

والامثلة السابقة توضح كيف ان الفكر الاساسية فى الهندسة هى بالضبط نفسها كما فى الجبر ، باستثناء ان الجبر يتعامل بالاعداد والهندسة تتعامل بالخطوط والزوايا والمساحات والعناصر الهندسية الاخرى. وهذا التطابق الاسى هو احد الاسباب التى تجعل فى الامكان وضع الكثير من الحقائق الهندسية بقالب جبرى . فاذا كانت أ ، ب ، عدد الدرجات فى زوايا المثلث أ ب حـ مأخوذة بالترتيب ، مثلت العلاقة فيما بين هذه الزوايا بالمعادلة أ + ب + حـ = ١٨٠ درجة واذا كانت أ̄ ، ب̄ ، حـ̄ عدد الاقدام فى الاضلاع الثلاثة مأخوذة على الترتيب ، مثلت العلاقة فيما بين الاضلاع بالمتباينات أ < ب + حـ، ب < حـ + أ، حـ < أ + ب. والدساتير المثلثية التى جاء نصها أعلاه ، أمثلة أخرى على هذه الحقيقة نفسها . وعلى ذلك فان فكرة المتغير والعلاقة فيما بين المتغيرات جوهرية فى الهندسة كما فى الجبر .

وهـذا التطابق او التوازى بين علمى الهندسة والجبر ، يمكن السير به الى مدى ابعد . لان الاطوال والمساحات والحجوم والزوايا ، جميعها قابلة للقيـاس ، بحيث يمكن مثـلا وجدان مقدار أى طول من الاطوال بمعرفة عدد احتوائه (ليس من الضرورى ان يكون هذا العدد صحيحا) على وحدة اصطلح العرف عليها. ويقال مثل ذلك عن المساحات والحجوم والزوايا . ومن الامثلة على هـذه الحقيقـة الـدساتير المثلثية المذكورة اعلاه .

وتبلغ فائدة هـذا الامر ذروتها فى الهنـدسة التحليليـة . ذلك

الموضوع العظيم الذى كثيرا ما يسمى خطأ بالقطوع المخروطية التحليلية Analytical conic sections مما يؤدى الى تركيز الانتباه على احد اجزائه الفرعية ليس الا • ومثل ذلك كمن يطلق على علم الانثروبولوجى الواسع (التاريخ الطبيعى للانسان) ، اسم دراسة الانوف على اعتبار ان الانوف جزء بارز فى جسم الانسان •

ومع ان الاساليب الرياضية فى الهندسة والجبر متطابقة من حيث الجوهر ومتشابكة فى نشوئها، يوجد بحكم الضرورة فارق اساسى بين خواص الفراغ وخواص العدد• وهو يتضمن فى الواقع كل الاختلاف الجوهرى بين الفراغ والعدد • ذلك ان « فراغية » الفراغ Spaciness of space و « عَددية » العدد Numerosity of number امران مختلفان من الاساس ويجب تفهم كل منهما على حدة • وليس فى تطبيقات الجبر على الهندسة او الهندسة على الجبر ما يقدمنا خطوة واحدة فى طريق محو هذا الفارق الحيوى •

واحد الفوارق البينة بين الفراغ والعدد هو ان الاول يلوح من ناحيتى التجرد والاهمية أقل بكثير من الثانى • فالملائكة المقربون يمكن عدهم لمجرد انهم أشياء ، فاذا علمنا ان اسماءهم هى رفائيل وميكائيل وجبرائيل ، وان كلا من هذه الاسماء يمثل مخلوقا مستقلا ، نعرف دون احتياج الى سؤال آخر ان عددهم ثلاثة ومهما كانت نظرة الناس الى طبيعة الوجود الملائكى فهى لا تستطيع تغيير هذه الحقيقة اذا كانت المقدمات صحيحة •

ولكننا لا نزال فى ظلام فيما يختص بمعرفة علاقتهم بالفراغ . هل لهم وجود ما فى الفراغ ؟ ولا يقل عن ذلك سخفا القول بانهم هنا او هناك او فى مكان ما او فى كل مكان . ذلك ان وجودهم قد لا تكون له علاقة بمواقع فى الفراغ . وعليه بينما يمكن استخدام الاعداد لكل الاشياء فلا حاجة ان يكون الفراغ كذلك .

ويظهر ان ادراك مواقع الاشياء يرافق بعض او كل احساساتنا او هو مشمول بها . وهو مستقل عن أية حاسة معينة ، بمعنى انه يرافق احساسات عديدة . ولكنه صفة خاصة للاشياء التى ندركها باحساساتنا. والادرك المباشر لما نقصده بمواضع الاشياء بنسبة بعضها الى بعض ، امر خاص مثل ادراك الاصوات والالوان والمذاقات والروائح . ولذلك يلوح عند النظرة الاولى ان الرياضيات ، عندما تقع الهندسة ضمن نطاقها ، لا تكون مجردة بمعنى التجرد الذى نسبناه اليها فى الفصل الاول .

ولكن ذلك خطأ ، والحقيقة هى ان « فراغية » الفراغ لا تدخل فى « التعليل » الهندسى بتاتا . بل تدخل فى البدائه الهندسية للرياضيين بطرق شخصية ، خاصة بكل فرد . اما ما يدخل فى التعليل فهو مجرد بعض الخواص المعينة لاشياء فى الفراغ ، او لاشياء تؤلف فراغا . وهذه الخواص مجردة بالمعنى التام الذى عرفنا به المجرد فى الفصل الاول . وهى لا تتضمن أى شىء من مفهوم الفراغ او بديهة الفراغ او الاحساس بالفراغ ولكنها تقوم على نفس الاسس التى تقوم عليها الخواص الرياضية للعدد. ولذلك فان بديهة الفراغ على اهميتها كعون فى دراسة الهندسة،

لا تتعلق بالامر من الوجهة المنطقية . فلا تدخل فى المقدمات اذا نص عليها بالشكل الصحيح ولا فى أية خطوة من خطوات التعليل . ولكن لها من الاهمية العملية ، ما لمثال نراه جوهريا لشحذ الذهن . والامثلة التى تستحث الاذهان عند دراسة العدد ، لها الضرورة نفسها . فعندما نفكر فى العدد (اثنين) او (ثلاثة) نتصور خطوطا فى صف او كراة فى كومة او مجموعات مادية اخرى لاشياء معلومة . وخاصية الهندسة هى ثبوت صورة المثال المعين الواحد الذى خطر ببالنا واهميته المفرطة . اما الصيغة المنطقية المجردة للقضايا عندما ينص عليها بصورة كاملة فهى « اذا كان لمجموعات ما من الاشياء كذا وكذا من الخواص المجردة يكون لها ايضا كذا وكذا من خواص مجردة أخرى » . واما الصورة التى تظهر للفكر فهى مجموعة من النقاط والخطوط والسطوح والحجوم فى الفراغ : ولا مناص من تصور هذا النموذج . فهو الصورة الوحيدة التى تسبغ على القضية اهميتها . وعلى الرغم من اهمية النموذج المفرطة ، فهو ليس اكثر من مثال واحد .

والهندسة ، عند النظر اليها كعلم رياضى ، تعد فرعا من علم اعم ، هو علم النسق Order . ويمكن تسميتها علم النسق البعدى . ولقد ادخلت الصفة « بعدى » عليها لان الحدود التى تجعلها جزءا فقط من علم النسق العام ، هى التى تكوّن العلاقات المنتظمة بين الخطوط المستقيمة والمستويات وبين المستويات والفراغ بأجمعه .

ومن السهل ان نفهم الاهمية العلمية للفراغ عند تكوين فكرة

علمية عن عالم مادى خارجى . فمن الجهة الاولى يكون ادراكنا الحسى للفراغ متشابكا مع احساساتنا المختلفة وبربطها معا . واننا فى الحالات الاعتيادية نحكم بأننا نلمس الجسم فى المكان نفسه الذى نراه فيه. وحتى فى الحالات الشاذة نلمسه فى الفراغ نفسه الذى نراه فيه . وهذه هى الحقيقة الاساسية التى تربط معا احساساتنا المختلفة . وعلى ذلك فان ادراكنا الحسى للفراغ يكون من وجه ما جزءا اعتياديا من احساساتنا . ومن جهة اخرى يحدث ان الخواص المجردة للفراغ تؤلف جزءا كبيرا من كل ما يكون ذا اهمية فراغية . وليس من المبالغة فى شىء، القول بأن لكل خاصية من خواص الفراغ نصا رياضيا مجردا يناظرها . لنأخذ أشد الحالات عسرا ، فقد يكون لشكل المنحنى جمال خاص ! ولكن هذا الشكل له ما يناظره من خواص رياضية مجردة تنطبق عليه ولا تنطبق على سواه .

والخلاصة : (١) ان خواص الفراغ التى يستقصيها علم الهندسة ، كخواص العدد ، تعود للاشياء كأشياء ودون الرجوع الى أى اسلوب معين من اساليب الادراك (٢) ان الادراك الحسى للفراغ ربما رافق جميع احساساتنا وبالتأكيد الكثير منها . ولكنه لا يبدو صفة ضرورية للاشياء ان توجد جميعا فى فراغ واحد او فى أى فراغ .

الفصل السابع عشر

الكمية

بينا فى الفصل السابق ، ان الاطوال يمكن قياسها بواسطة احدى وحدات الطول ، والمساحات بواسطة وحدة مساحة والحجوم بواسطة وحدة حجم • وعندما يكون لدينا مجموعة من الاشياء كالاطوال التى يمكن قياسها بواسطة أحدها نقول عنها انها كميات من نوع واحد • ولذلك تعد الاطوال كميات من نوع واحد ومثلها تعد كل من المساحات والحجوم • ولكن المساحة كمية ليست من نوع الطول او نوع الحجم • ولنفكر اكثر قليلا عما نعنيه بامكانية القياس ولنأخذ الاطوال مثلا •

تقاس الاطوال بذراع طوله قدم واحد • وبنقل هذه الذراع من مكان الى آخر ، نقرر المساواة بين الاطوال • ثم ان ثلاثة اطوال متجاورة، طول كل منها قدم واحد، تؤلف طولا كليا واحدا قدره ثلاثة اقدام• وعليه ، فى قياس الاطوال، يجب ان نحدد تساوى الاطوال ومجموع الاطوال • ففى اجراء فحص مثل نقل الذراع نقول ان الاطوال متساوية ، وفى اجراء عملية لنحصل على اطوال متواصلة لا

متـداخلة ، نقول ان الاطوال جمعت لتؤلف طولا كليا واحدا • ولكننا لا نستطيع بصورة كيفية ان نعد أى فحص كان فحصا للمساواة ، وأية عملية كانت عمليــة جمع • اذ ان نتائج عمليات الجمع وقرارات الحكم بالمساواة يجب ان تنسجم مع شــروط معلومة سلفـا • مثال ذلك ، ان مجموع طولــين يجب ان ينتج طولا اكبر من مجموع طولــين آخرين اصغر منهما • وهذه الشروط المعلومة سلفا ، اذا ما صيغت بقالب دقيق ، تسمى بديهيات الكمية • والسؤال الوحيد الذى يمكن ان يوجه عن صحتها او بطلانها هو ، هل اذا صحت البديهيات هذه ، نحصل بحكم الضرورة على ما يدعوه الناس الاعتياديون بالكميات • فأن لم نحصل على ذلك ، نكون قد أسأنا الحكم فى الاسم « بديهيات الكمية » ، وهذا كل ما فى الامر •

ان بديهيات الكمية هذه مجردة تماما ، كما هى الحال فى الخواص الرياضية للفراغ • وهى واحدة لجميع الكميات ، ولا تفترض طريقة معينة من الادراك الحسى • والآراء المرتبطة بفكرة الكمية هى الوسائل التى نستعين بها فى تجزئة مطرد Continuum كالخط والمساحة والحجم الى اجزاء معينــة • ثم نحصى هــذه الاجزاء ، بحيث يمكن استخــدام الاعداد فى وجدان الخواص الصحيحة لكل مطرد Continuous whole

وما ادراكنــا لجريان الزمن وتعــاقب الحــوادث الا مثل رائع عن تطبيق هذه الافكار عن الكمية • فالزمن نفسه (كما سبق ان قلنا فى بحث الدورية) بتكرر حوادث متشابهة كاحتراق عقـد متتالية لشمعة

منتظمة ، ودوران الارض بالنسبة الى النجوم الثابتة ، ودوران عقارب الساعة ، كل هذه امثلة لمثل هذا التكرر . وان حوادث من هذا القبيل هى التى تقوم بما يقوم به الذراع بالنسبة للاطوال. وليس من الضرورى ان نفترض الحوادث متساوية فى مدتها عند كل تكرر فى أى من هذه الانواع . ولكن الضرورى هو معرفة قاعدة تجعل فى وسعنا التعبير عن المدد النسبية لنموذجين مثلا من نوع ما . مثال ذلك يمكننا ، اذا شئنا ، ان نفترض ان معدل سرعة دوران الارض يتناقص ، بحيث يكون كل يوم اطول من سابقه بكسر صغير من الثانية . ومثل هذه القاعدة تمكننا من اجراء المقارنة بين طول أى يوم وطول أى يوم آخر . ولكن الامر الجوهرى هو ان نتخذ سلسلة من المتكررات ، كالايام المتعاقبة ، سلسلة قياسية ، فاذا لم تكن الحادثات المختلفة لهذه السلسلة ، ذات مدد متساوية وجب وجدان قاعدة تضبط المدد المقتضى تحديدها لكل يوم بدلالة مدة أى يوم آخر .

ما اذن المطالب التى يجب ان تستوفى فى مثل هذه القاعدة ؟ انها اولا يجب ان تؤدى الى تثبيت مدد متساوية تقريبا ، للحادثات التى يقول حسن الادراك عنها ، انها ذات مدد متساوية . فلا يصح الاخذ بقاعدة تجعل الايام تتباين فى اطوالها تباينا كبيرا او ان تجعل السرع فى عمليات تتشابه تشابها بينا ، تختلف فيما بينها بصورة لا تتناسب بتاتا مع التفاهة البينة للفوارق بينها . وعلى ذلك فالمطلب الاول اذن ، ان تكون القاعدة على وفاق عام مع حسن الادراك . ولكن ذلك لا يكفى

مطلقا لتحديد القاعدة لان حسن الادراك راصد غير دقيق وسهل الاقتناع • اما المطلب الثانى فهو ان تجعل الضوابط الدقيقة للقاعدة بشكل يسمح بأسهل النصوص الممكنة لقوانين الطبيعة • مثال ذلك ، يخبرنا الفلكيون ان الارض تتباطأ فى دورتها بحيث ان كل يوم يزداد طولا بكسر من الثانية لا يدركه التصور لصغره • والسبب الوحيد لقولهم هذا (كما بينا بتفصيل اكثر فى بحث الدورية) هو ان عليهم من دونه ان يهجروا قوانين نيوتن للحركة • وكيما تكون قوانين الحركة سهلة يغيرون مقياس الزمن • وهذا تصرف مشروع تماما طالما ان الامر معروف جيدا •

وما قيل اعلاه عن الطبيعة المجردة لخواص الفراغ الرياضية ينطبق بتغييرات ملائمة فى الكلمات ، على خواص الزمن الرياضية • فالشعور بجريان الزمن يرافق كل احساساتنا وادراكاتنا • والواقع ، ان كل ما يهمنا عن الزمن يمكن ان يتناظر هو والخواص الرياضية المجردة التى نعزوها اليه • وعلى العكس من ذلك فان ما قلناه عن المطلبين اللذين يجب ان تستوفيهما القاعدة التى نجد بموجبها طول اليوم ينطبق ايضا على القاعدة فى تحديد طول المقياس يارد ــ وهو ان اليارد يحتفظ حسب الظاهر بالطول نفسه فى تنقلاته • وعلى ذلك فكل قاعدة يجب ان تنص ــ فيما عدا التغيرات الدقيقة ــ على بقاء طوله ثابتا • كذلك فان المطلب الثانى هو ، وضع قاعدة معينة للتغيرات الدقيقة بحيث تسمح بأسهل تعبير ممكن لقوانين الطبيعة • مثال ذلك نفترض فى

مقياس البارد ، وفقا للمطلب الثانى ، انه يتمدد ويتقلص بتغير درجة الحرارة على حسب المادة التى صنع منها •

وباستثناء الحقائق القائلة بأن احساساتنا ترافق ادراكنا الحسى للموقع والمدة ، وان الخطوط والمساحات والحجوم والمدد كميات ، كل من ناحيتها ، تصبح نظرية الاعداد ذات قيمة ثانوية جدا فى استقصاء قوانين الطبيعة • اما الواقع فهو ان العلوم الطبيعية تستند الى الافكار الاساسية عن العدد والكمية والفراغ والزمان • والعلوم الرياضية المربوطة بهذه الامور لا تؤلف كل الرياضيات ولكنها الاساس الذى تقوم عليه الفيزياء الرياضية كما هى عليه الان •

مُلاحَظاتٌ

(أ) صحيفة ٥٨

مما تجب ملاحظته عند قراءة هذه المعادلات ان الاقواس تستعمل فى الرمزية الرياضية للاشارة الى ان العمليات المبينة داخلها هى التى يجب اجراؤها اولا • ففى (١ + ٣) + ٢ يجب اضافة الـ ٣ الى الـ ١ اولا ثم اضافة الـ ٢ الى الناتج • واليك مثالا عدديا عن المعادلة (٥)

٢ × (٣ + ٤) = (٢ × ٣) + (٢ × ٤)

نجرى اولا العمليات المبينة داخل القوسين فنحصل على :

٢ × ٧ = ٦ + ٨

وهى نتيجة صحيحة كما هو ظاهر •

(ب) صحيفة ١٢٨

ان النسبة الاساسية $\frac{ف ن}{ن ل}$ تسمى انحراف المنحنى Eccentricity of the curve ويتوقف شكل المنحنى ، وهو أمر يختلف عن مقياسه وسعته ، على قيمة الانحراف • ومن الخطأ الظن بأن القطوع الناقصة عامة او ان القطوع الزائدة عامة ذات شكل واحد معين•

فللقطوع الناقصة ذات الانحرافات المتباينة اشكال مختلفة وتتوقف سعتها على مقدار محوريها الرئيسين . فالقطع الناقص ذو الانحراف الصغير يكون قريب الشبه بالدائرة . اما القطع الناقص الذى يكون انحرافه قريبا من الواحد الصحيح فيكون شكله بيضيا طويلا ضيقا . اما القطوع المكافئة فلها جميعا الانحراف نفسه ولذلك تكون جميعها ذات شكل واحد على انه يمكن رسمها بمقاييس مختلفة .

(ح) صحيفة ١٩٢

اذا كانت المتسلسلة التى جميع حدودها موجبة ، متسلسلة متقاربة ، فان المتسلسلة المستنبطة منها والتى نجدها بجعل طائفة من حدود المتسلسلة الاولى موجبة وطائفة منها سالبة ، طبقا لقاعدة معينة ، تكون ايضا متسلسلة متقاربة . وكل متسلسلة من بين مجموعة المتسلسلات التى استخرجت بهذا الشكل بما فيها المتسلسلة الاصلية يقال عنها انها « متقاربة بحتة » . على انه من الجائز ان تكون المتسلسلة التى قسم من حدودها موجب وقسم آخر سالب متسلسلة متقاربة وان كانت المتسلسلة المناظرة لها والتى جميع حدودها موجبة متسلسلة متباعدة . مثال ذلك ان المتسلسلة

$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \cdots$ الخ متسلسلة متقاربة مع ان المتسلسلة $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \cdots$ الخ متسلسلة متباعدة كما برهنا ذلك . والتعامل بمثل هذه المتسلسلات التى هى ليست متقاربة بحتة أصعب جدا من التعامل بالمتسلسلات التى تكون متقاربة بحتة .

الكتب والمراجع

ملاحظات عن كيفية دراسة الرياضيات

ان الصعوبة التي يجدها المبتدئون بدراسة هذا العلم ناشئة عن الكمية الكبيرة من التفاصيل الفنية التي سمح بتراكمها في كتب الدراسة الاولية فطغت على الافكار المهمة .

واول مواضيع الدراسة ، عدى ما يفترض معرفته من علم الحساب ، يجب ان يكون علم الهندسة ومبادىء الجبر . اما منهاج الدراسة لهذين الموضوعين فيحسن ان يكون مختصرا ، ومقتصرا على الآراء الضرورية وحدها . ويقتضي ان يدرس الجبر بالاستناد الى الرسم البياني ليهضم الطالب بالممارسة مبادىء آراء الهندسة الاحداثية أيضا . والموضوعان اللذان يجب أن يعقبا ذلك هما مبادىء المثلثات ، والهندسة الاحداثية للخط المستقيم وللدائرة . والموضوع الاخير يؤخذ بصورة مختصرة لانه في الحقيقة يندمج بموضوع الجبر . وبذلك يتهيء الطالب للدخول في دراسة القطوع المخروطية بحيث يأخذها منهجا مختصرا من الناحية الهندسية ومنهجا اطول من الناحية

التحليلية . وينبغي ان يعنى بأن لا يحمل الفكر ، فى هذه الدراسات ، بتفاصيل اكثر مما هو لازم لتمثيل الآراء الاساسية .

بقى لدينا حساب التفاضل وبعده حساب التكامل وهذان الموضوعان يجب ان يقتحما بالطريقة عينها . على ان المدرس الحاذق هو الذى سبق له ان تطرق اليهما ، عند النظر فى عدد من الحالات الخاصة ، عند دراسة الجبر والهندسة الاحداثية . ولابد من دراسة كتاب مختصر عن الهندسة الفراغية (ذات الابعاد الثلاثة) .

ان هذا المنهج الاولى فى الرياضيات يفى بحاجات بعض انواع المهن . وهو فى الوقت نفسه تمهيد ضرورى لمن يرغب بدراسة الموضوع لقيمته الذاتية ، فيصبح بعده على استعداد للبدء بدراسة أوسع . وعليه ان لا يتوقع امكان السيطرة على الموضوع بأسره لان هذا العلم توسع الى حد نرجح معه ان بين الرياضيين الاحياء لا يوجد من يدعى انه توصل الى الاحاطة به .

نأتى الان الى ذكر الكتب القيمة عن الموضوع ، التى ينبغى قراءتها (بعد) الدراسة الاولية فنذكر ما يأتى : كتاب الهندسة البحتة Pure geometry تأليف كرمونا Cremona وقد ترجم الى اللغة الانكليزية ونشرته مطبعة كلارندن (اوكسفورد) . وكتاب هوبسون فى علم المثلثات وكتاب كريستال فى الجبر (والكتاب هذا يتألف من مجلدين) وكتاب القطوع المخروطية تأليف سالمون وكتاب الحساب التفاضلى تأليف لامب . وكتاب عن المعادلات التفاضلية . ومن المحتمل

أن الطالب لا يود أن يوجه اهتماما متساويا الى هذه المواضيع كلها بل ويدرس واحدا منهـا أو أكثـر وفق ما تفرضـه عليه ميوله • وبذلك يكون على استعداد ليختار لنفسه بحوثا ذات مستو اعلا وينغمر بالاقسام العليا فى الموضـوع • فان كان ميله الى التحليـل وجب عليـه ان يتقن دراسـة بحث أولى قيّم فى نظرية دوال المتغـير المركب • اما اذا فضل التخصص بالهنـدسة فعليه ان يتقـدم لدراسة احد الكتب القيّمـة فى الهندسة التحليلية ذات الابعاد الثلاثة • ولكنه فى هذه المرحلة من حياته العملية يكون فى غنى عن التوصيات الواردة فى هذه الملاحظة •

لقد تعمدت اجتناب ذكر الكتب الاولية لانها عديدة وذات مزايا متنوعة ولا يوجد بينها كتاب يمتاز بالتفوق عليها جميعا لننوه باسمه دون الكتب الاخرى •

فهرست الاعلام والمصطلحات

جدول الخطأ والصواب

الصفحة	السطر	الوارد	الصواب
٥	١٧	بدراسة	بدراسة
١٥	٧	لفكر	لنفكر
٢١	٧	نعر	نعبر
٢٤	١٢	قنع	تقع
٢٤	١٨	النقاط	النقاط
٢٦	٤	تاظر	تناظر
٢٩	٤	ولفكر	ولنفكر
٣٦	٣	كولمبس	كولومب
٤٣	٩	عد	عند
٤٦	١٠	النوى	القوى
٥١	١٧	اكثيرين	الكثيرين
٥٨	٤	فائذتها	فائدتها
٦٠	٢	الرباضيون	الرياضيون
٦٣	١٠	هاريوت	هاربرت
٧٣	٢	أشياه	أشباه
٧٣	٣	تفق	يتفق
٧٣	٧	يتم	يتم
٧٥	٩	كتتور	كنتور
٨٤	٢	ى	فى
٨٥	٥	موجه	موجبه
٨٦	١٦	تعقيذا	تعقيدا
٨٨	١٨	رى	نرى
٩٠	٧	مدالا	مثالا
٩٠	٨	السنائى	الثنائى
٩٠	١٤	معية	معينة
٩٣	٢	ق	و
١٢٠	١٥	مقدار	له مقدار
١٣٠	١٣	فمنذ	منذ
١٥٣	١٣	مقيابيس	مقاييس
١٥٦	٢	الـدديه	الدينية
١٦٧	١٢	الزواية	الزاوية
١٧٤	١١	قٓ	ق

ورد فى السطر ٤ صحيفة ١٩٠ (المجموع المعتاد لعدد محدود من الحدود خواص مماثلة دون تمحيص ... الخ) . والصحيح : (هذا المجموع ما يماثل خواص المجموع المعتاد لعدد محدود من الحدود دون تمحيص ... الخ)

مطبوعات المجمع العلمي العراقي

	فلس
١ ـ مجلة المجمع العلمي العراقي	٦٠٠
٢ ـ كتاب النغم ليحيى بن علي بن يحيى المنجم بتحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثري ومقدمة الدكتور جواد علي	٨٠
٣ ـ تاريخ العرب قبل الاسلام الجزء الأول تأليف الدكتور جواد علي	٥٠٠
٤ ـ خارطة بغداد الاثرية وضع الدكتور أحمد سوسة والسيد أحمد حامد الصراف والدكتور مصطفى جواد	٧٠
٥ ـ صورة الأرض للادريسي تحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثري والدكتور جواد علي	٣٠٠
٦ ـ تاريخ العرب قبل الاسلام الجزء الثاني تأليف الدكتور جواد علي	تحت الطبع
٧ ـ ابن الفوطي لمعالي الاستاذ محمد رضا الشبيبي	« «
٨ ـ خريدة القصر وجريدة العصر للعماد الاصبهاني الكاتب ، تحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثري والدكتور جميل سعيد	
٩ ـ الدينار الاسلامي في المتحف العراقي تأليف السيد ناصر النقشبندي	« «
١٠ ـ ملخص كتاب الدراسات في دورة الكلية الدموية تلخيص الدكتور هاشم الوتري	١٢٠
١١ ـ الخطاط البغدادي علي بن هلال : تأليف الدكتور سهيل أنور ترجمة السادة محمد بهجة الأثري وعزيز سامي	
١٢ ـ دليل صورة الارض للدكتور جواد علي	« «
١٣ ـ قاموس الرياضيات	

الكتب التي ساعد المجمع على طبعها

١ ـ اليزيدية : تأليف السيد صديق الدملوجي طبع في الموصل
٢ ـ انت والوراثة : تأليف امرام شاينفلد وترجمة بشير اللوس طبع في بغداد
٣ ـ المدخل الى الفلسفة الحديثة : تأليف سي ٠ آي ٠ ام جود وترجمة كريم متي طبع في بغداد
٤ ـ كتاب الديارات للشابشتي تحقيق كوركيس عواد
٥ ـ ديوان الشرر : للشاعر السيد أحمد الصافي النجفي
٦ ـ الشرفنامة : تأليف الامير شرف خان البدليسي تعريب محمد جميل الروزبياني